الجزء الثاني من المنتخبة الزهرية

في الاعمال الجبرية

طبع بمطبعة مدرسة المهندسخانة الخديوية

١٢٦٨

تصحيح

فهرست الجزء الثانى من المنهج الزهرى فى الاعمال الجبرية

الباب الرابع

١٦ | ١ ٣٥

ـ د = هـ ـ و

في طريقة المكررات غير لطبيعة

ا

حـ

ح ص

بسم الله الرحمن الرحيم

الباب الرابع

فى المناسبات والمتواليات العددية والهندسية والمتباينات والكسور المتسلسلة والحل غير المعين للمعادلات ذات الدرجة الاولى

فى المناسبة العددية اى التفاضلية

بند ٩٦ براهين خواص المناسبة المقررة فى كتب علم الحساب تسهل جدًا بواسطة القواعد الجبرية وبيان ذلك أن يقال

كل مناسبة عددية كالمناسبة

ح . د : هـ . و

توضع هكذا

ح − د = هـ − و   ومنها يستخرج

ح + و = هـ + د ، و = هـ + د − ح ، هـ = ح + و − د

اعنى أن كل مناسبة عددية حاصل جمع طرفيها يساوى حاصل جمع وسطيها وأن احد طرفيها يساوى حاصل جمع وسطيها منقوصًا منه الطرف الآخر وأن احد وسطيها يساوى حاصل جمع طرفيها منقوصًا منه الوسط الآخر

ويستنتج

ويستنتج من المتساوية $ح + و = ه + د$ أن $ح - د = ه - و$
أعني إذا ساوى حاصل جمع عددين حاصل جمع عددين آخرين تركب من هذه الأعداد الأربعة متناسبة عددية أحد الحاصلين طرفاها وجزآ الآخر وسطاها

والوسط التفاضلي لعددين يساوي نصف حاصل جمعهما لأنه من المتناسبة

$ح . س : س . د$ يحدث

$2 س = ح + د$ ومن هذه المتساوية ينتج

$$س = \frac{ح + د}{2}$$

في المتناسبة الهندسية

بند ٩٣ كل متناسبة هندسية كالمتناسبة $ح : د :: ه : و$
توضع هكذا $\frac{ح}{د} = \frac{ه}{و}$ ومن هذه المتساوية يستنتج

$ح و = د ه$ ، $و = \frac{د ه}{ح}$ ، $ه = \frac{ح و}{د}$

أعني أن كل متناسبة هندسية حاصل ضرب طرفيها يساوي حاصل ضرب وسطيها وأن أحد طرفيها يساوي خارج قسمة حاصل ضرب وسطيها على طرفها الآخر وأن أحد وسطيها يساوي خارج قسمة حاصل ضرب طرفيها على الوسط الآخر

ويستنتج من كل متساوية كالمتساوية $ح و = د ه$ أن $\frac{ح}{د} = \frac{ه}{و}$
أعني متى كان حاصل ضرب عددين مساويا لحاصل ضرب عددين آخرين [illegible]
من هذه الأربعة أعداد متناسبة هندسية أصلا أحد الحاصلين [illegible]

واصلا الحاصل الآخر وسطانالها

ويستنتج من المتساوية ج و = د ه بناعلى ما تقدم ثمان متناسبات

ج : د :: ه : و   ج : ه :: د : و   و : د :: ه : ج   و : ه :: د : ج

د : ج :: و : ه   د : و :: ج : ه   ه : و :: ج : د   ه : ج :: و : د

فيشاهد من متناسبات الصف الاول الأربعة أن الأربعة الأعداد المتناسبة

مع بعضها يتكون منها متناسبة ايضًا بتغيير موضع الوسطين أو الطرفين

ويشاهد ايضًا من متناسبات الصف الثانى الأربعة أن التناسب لا يتغير

بتغيير الطرفين بالوسطين والوسطين بالطرفين

والوسط الهندسى بين عددين أو كميتين يساوى جذر حاصل ضربهما لانه من

المتناسبة   ج : س :: س : د   يحدث

س٢ = ج × د   أو   س = √(ج × د)

واذا ضرب طرف ووسط متناسبة فى عدد واحد أو قسما عليه بقيت المتناسبة

على حالها لانه يستنتج من المتساوية $\frac{ج}{د} = \frac{ه}{و}$ أن

$\frac{ج}{د} = \frac{هم}{وم}$ أو   ج : د :: هم : وم

ويستنتج ايضًا من المتساوية المذكورة $\frac{ج}{ه} = \frac{د}{و}$ ومن هذه يحدث

$\frac{ج}{ه} = \frac{دم}{وم}$ أى   ج : ه :: دم : وم

ومثل هذا يبرهن على حالة القسمة

وإذا كان للمتناسبتين نسبة مشتركة تركب من النسبتين الأخريين متناسبة فالمتناسبتان

ج : د :: هـ : و , ج : د :: هـَ : وَ يوضعان هكذا

$\frac{ج}{د}=\frac{هـ}{و}$, $\frac{ج}{د}=\frac{هـَ}{وَ}$. ومن هاتين المتساويتين يحدث

$\frac{هـ}{و}=\frac{هـَ}{وَ}$ أي هـ : و :: هـَ : وَ

ومتى اتحد المقدمات أو التاليات في متناسبتين تركب من غير المتحد منهما متناسبة لانه اذا فرضت المتناسبتان ج : د :: هـ : و , ج : ز :: هـ : ح أو

د : ج :: و : هـ , ز : ج :: ح : هـ

استنتج منهما بمقتضى ما تقدم

ج : هـ :: د : و , ج : هـ :: ز : ح فاذاً يحدث

د : و :: ز : ح أي د : ز :: و : ح

وكل متناسبة هندسية كالمتناسبة ج : د :: هـ : و يمكن وضعها هكذا $\frac{ج}{د}=\frac{هـ}{و}$ وباضافة واحد لكل من طرفي هذه المتساوية أو طرحه منها تؤول الى

$$\frac{ج}{د}\pm 1=\frac{هـ}{و}\pm 1$$ أي

$$\frac{ج\pm د}{د}=\frac{هـ\pm و}{و}$$ ومنها يحدث

ج+د : د :: هـ+و : و , ج−د : د :: هـ−و : و

ويحدث أيضاً من مقارنة المتناسبة ج : د :: هـ : و مع كل من المتناسبتين

المقدمين

ح+د : ح :: ه+و : ه ، ح−د : ح :: ه−و : ه   ومنها يحدث

ح+د : ح−د :: ه+و : ه−و

وينتج من ذلك أن نسبة المقدم الاول زائداً أو ناقصاً تالى الأول الى هذا التالى كنسبة المقدم الثانى زائداً أو ناقصاً التالى الثانى الى هذا التالى

وأن نسبة المقدم الأول زائداً أو ناقصاً التالى الاول الى هذا المقدم كنسبة المقدم الثانى زائداً أو ناقصاً التالى الثانى الى هذا المقدم

وأن نسبة المقدم الأول زائداً تاليه الى هذا المقدم ناقصاً تاليه كنسبة المقدم الثانى زائداً تاليه الى هذا المقدم ناقصاً تاليه

واذا غير وسطا المتناسبة ح : د :: ه : و آلت الى

ح : ه :: د : و   ومنها يحدث بناء على ما تقدم

ح±ه : د±و :: ه : و :: ح : د   ومنها يحدث

ح+ه : د+و :: ح−ه : د−و

أعنى أن نسبة حاصل جمع أو فاضل مقدمى متناسبة الى حاصل جمع أو فاضل تاليها كنسبة أى مقدم الى تاليه وأن نسبة حاصل جمع المقدمين وحاصل جمع التاليين تعادل النسبة بين فاضل المقدمين وفاضل التاليين

والمتناسبة التى بهذه الصورة ح : د :: ه : و :: ر : ع :: ط : ى :: ...

تسمى متناسبة متوالية

وكل متناسبة متوالية حاصل جمع مقدماتها الى حاصل جمع تالياتها كنسبة أي مقدم الى تاليه فاذا رمز للنسبة المشتركة في هذه المتناسبة بالحرف ل تحصل

$$\frac{ح}{ء}=ل \ ، \ \frac{ه}{و}=ل \ ، \ \frac{ز}{ع}=ل \ ، \ \frac{ط}{ے}=ل \ ..... \text{الخ}$$

ومنها يحدث

$$ح=ءل \ ، \ ه=ول \ ، \ ز=عل \ ، \ ط=ےل \ ..... \text{الخ}$$

وبجمع هذه المتساويات طرفا الى طرف يحدث

$$ح+ه+ز+ط+\text{الخ}=ل(ء+و+ع+ے+\ ...\ \text{الخ})$$

ومنها يحدث

$$\frac{ح+ه+ز+ط+....\text{الخ}}{ء+و+ع+ے+....\text{الخ}}=ل=\frac{ح}{ء}=\frac{ه}{و}=\text{الخ}$$ فاذا يكون

$$ح+ه+ز+ط+....\text{الخ} : ء+و+ع+ے+....\text{الخ} :: ح:ء :: ه:و :: \text{الخ}$$

واذا ضربت جملة متناسبات بالترتيب في بعضها تكون من حواصل الضرب الاربعة المختلفة متناسبة فالمتناسبات

$$ح:ء::ه:و \ ، \ ح':ء'::ه':و' \ ، \ ح'':ء''::ه'':و''$$ يحدث منها

$$\frac{ح}{ء}=\frac{ه}{و} \ ، \ \frac{ح'}{ء'}=\frac{ه'}{و'} \ ، \ \frac{ح''}{ء''}=\frac{ه''}{و''}$$ وبضربها يحدث

$$\frac{حح'ح''}{ءء'ء''}=\frac{هه'ه''}{وو'و''} \ \therefore \ حح'ح'':ءء'ء''::هه'ه'':وو'و''$$

واذا رفع كل من الحدود الاربعة لمتناسبة الى درجة ما أو أخذ جذر كل منها

بدرجة واحدة لم تزل متناسبة

فالمتناسبة ح : ء :: هـ : و توضع هكذا

$\frac{ح}{ء} = \frac{هـ}{و}$ فاذا رفع طرفا هذه المتساوية لدرجة ما أو اخذ جذراهما

بدرجة ما بقيت على حالها فيكون

$\frac{ح^٣}{ء^٣} = \frac{هـ^٣}{و^٣}$ ، $\frac{\sqrt[م]{ح}}{\sqrt[م]{ء}} = \frac{\sqrt[م]{هـ}}{\sqrt[م]{و}}$ ومنهما يحدث

$ح^٣ : ء^٣ :: هـ^٣ : و^٣$ ، $\sqrt[م]{ح} : \sqrt[م]{ء} :: \sqrt[م]{هـ} : \sqrt[م]{و}$

فى المتواليات العددية

بند ٩٦ كل متسلسلة مركبة من حدود يزيد أحدها عن سابقه أو ينقص عنه بكمية ثابتة تسمى متوالية عددية أو تفاضلية والكمية الثابتة تسمى اساس المتوالية

فالمتسلسلتان

١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٩ ، ٢٢ ، ٢٥ و

٦٠ ، ٥٦ ، ٥٢ ، ٤٨ ، ٤٤ ، ٤٠ ، ٣٦ ، ٣٢ ، ٢٨

تسميان متواليتين الا أن الاولى تسمى متوالية عددية تصاعدية اساسها ثلاثة

والاخرى تنازلية اساسها أربعة فالمتوالية العددية تكون تصاعدية

او تنازلية بحسب كون اساسها موجبا أو سالبا

واذا رمز بالحروف ح ، ء ، هـ ، و ..... لخ لحدود متوالية عددية توضع هكذا

÷ ح ، ء ، هـ ، و ، ز ، ح ، ط ...... ك ، ل

ويلفظ بها ح الى ء الى هـ الى و الى ..... الخ

واذا رمز للأساس بالحرف ر وللحد الاول بالحرف ح وللحد الأخير المسبوق بحدود عددها م−١ بالحرف ل تحصل بمقتضى التعريف

ء = ح + ر ، هـ = ء + ر ، و = هـ + ر ، ل = ك + ر أى

ء = ح + ر ، هـ = ح + ٢ر ، و = ح + ٣ر ..... ل = ح + (م−١) ر

فإن أى حد من متوالية عددية يساوى الحد الاول مضافا اليه حاصل ضرب عدد الحدود السابقة له فى الأساس

وحيث أن المعادلة ل = ح + (م−١) ر ...... (١) تشتمل على اربع كميات فلا يمكن ادراك احدها الا بعد معرفة الثلاث الاخرى

واذا اريد ادخال جملة حدود عددها م بين أى حدين معلومين بشرط أن يتركب من الجميع متوالية عددية فحيث أن هذه المتوالية لا تحتاج فى تركيبها الا لتعيين اساسها المجهول ولذا يستخرج من معادلة (١)

$$ر = \frac{ل - ح}{م - ١}$$

وحيث كان م = م + ٢ يكون

$$ر = \frac{ل - ح}{م + ١}$$

أعنى أن اساس المتوالية المطلوبة يساوى خارج قسمة فاضل الحدين المعلومين

على عدد الحدود المدخلة زائداً واحداً

فاذا اريد ادخال ثمانية حدود بين العددين ٤ ، ٤٩ بحيث يتركب من الجميع متوالية عددية وضع في المعادلة $ر = \frac{ل - ح}{م + ١}$ بدل ل ، ح ، م مقاديرها وهي ٤٩ ، ٤ ، ٨ فيحصل $ر = \frac{٤٩ - ٤}{٩} = \frac{٤٥}{٩} = ٥$ أعني أن الأساس المطلوب يساوي ٥ وحينئذ تركب المتوالية هكذا

÷ ٤ . ٩ . ١٤ . ١٩ . ٢٤ . ٢٩ . ٣٤ . ٣٩ . ٤٤ . ٤٩

وحاصل جمع كل عددين كائنين على ابعاد متساوية من طرفي متوالية يساوي حاصل جمع هذين الطرفين من المتوالية العددية

÷ ح . ى . هـ . و . ع . ط . ل فيحصل

ى = ح + ر و ط = ل − ر ومنهما يحدث

ى + ط = ح + ل

وقس على هذا

وإذا اريد تحصيل مقدار حاصل جمع حدود متوالية عددية كالمتوالية

÷ ح . ى . هـ . ... ل

يحصل بالبناء على ما تقدم

$ع = ح + (ح + ر) + (ح + ٢ ر) + ... + [ح + (م − ١) ر]$

بالرمز بالحرف ع لمقدار حاصل جمع حدود المتوالية المطلوب

ولايجاد قانون مختصر عن هذه نوضع المتساوية المتقدمة بهاتين الصورتين

$$\text{ع} = \text{ح} + (\text{ح} + \text{ر}) + (\text{ح} + ٢\text{ر}) + \cdots + (\text{ل} - ٢\text{ر}) + (\text{ل} - \text{ر}) + \text{ل}$$

$$\text{ع} = \text{ل} + (\text{ل} - \text{ر}) + (\text{ل} - ٢\text{ر}) + \cdots + (\text{ح} + ٢\text{ر}) + (\text{ح} + \text{ر}) + \text{ح}$$

ثم بجمع هاتين المتساويتين طرفا الى طرف وملاحظة أن حاصل جمع كل حدين متحدين فى الرتبة يؤل الى $\text{ح} + \text{ل}$ يتحصل

$٢\text{ع} = \text{ح} + \text{ل}$ مكررًا بقدر عدد الحدود أى

$٢\text{ع} = (\text{ح} + \text{ل})\,\text{م}$ ومنها يحدث

$$\text{ع} = \frac{(\text{ح} + \text{ل})\,\text{م}}{٢} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٢)$$

اعنى أن حاصل جمع حدود متوالية تفاضلية يساوى نصف حاصل جمع حديها المتطرفين مكررًا بقدر عدد حدودها

واذا وضع فى قانون (٢) بدل الحد الاخير ل مقداره المبين بمعادلة (١) آل الى

$$\text{ع} = \frac{\text{م}\,[٢\text{ح} + (\text{م} - ١)\,\text{ر}]}{٢}$$

نبه ٩٦ تحل المسائل المتعلقة بالمتواليات العددية بواسطة معادلتى (١) و (٢) وذلك انه اذا علم ثلاث كميات من الخمس ح، ر، م، ل، ع الداخلة فى معادلتى (١) و (٢) أمكن تعيين الاثنين الآخرين ومن تعشيق هذه الكميات الخمس مع بعضها بفرض ثلاث منها معلومة وباقيها مجهولًا يحدث عشر مسائل سهلة الحل

لانه يتحصل دائماً معادلتان مشتملتان على مجهولين

ونقتصر على حل المسائل الآئلة الى حل معادلة بدرجة ثانية فنقول

المسئلة الاولى اذا علم ه , ع , ر واريد تعيين م , ل بحذف المجهول ل من معادلتى (١) , (٢) فيتحصل

$$\text{؟} = \frac{1}{2\,\text{ر}}\left[\text{ر} - 2\,\text{ح} \pm \sqrt{(\text{ر} - 2\,\text{ح})^{2} + 8\,\text{ر}\,\text{ع}}\right] \cdots\cdots (٣)$$

واذا وضع بدل م فى المعادلة (١) مقداره توصل الى مقدارى ل المطابقين لها لكن لامكانية حل هذه المسئلة يلزم أن يكون م عدداً صحيحاً موجباً

فاذا فرض فى قانون (٣) ح = +٩ , ع = ١٢ , ر = −٢ حدث

؟ = +٣ , ؟ = +٧ فاذاً يحدث من قانون (١) المقداران المطابقان للمجهول ل وهما +٥ , −٣ وحيث كان لكل من المجهولين مقداران يمكن تركيب متواليتين موافقتين لمنطوق المسئلة هما

÷ ٩ . ٧ . ٥ , ÷ ٩ . ٧ . ٥ . ٣ . ١ , −٢ , −٣

واذا فرض ايضاً فى المعادلتين المتقدمتين ح = ٣ , ع = ٢٤ , ر = ٢

تحصل ؟ = ٤ , ؟ = −٦ ومن حيث أن م ليس له الا مقدار موجب لا يتحصل الا متوالية موافقة لمنطوق المسئلة هى

÷ ٣ . ٥ . ٧ . ٩

المسئلة الثانية اذا علم ل , ع , ر واريد تعيين ه , ح استخرج

من معادلة (١) مقدار ح فيكون

ح = ل − (ء − ١) ر .... (٤)

ثم بوضع مقدار ح في معادلة (٢) بدله ويستخرج مقدار ء فيحدث

ء = ١/٢ر [ر + ٢ل ± √((ر + ٢ل)^٢ − ٨ ر ح)]

وهو قانون يعلم منه مقدارا المجهول ء

فاذا فرض ل = ٩ ، ح = ١٢ ر = ٢ حدث ء = ٣ ، ء = ٧

وبناء عليه يكون مقدارا ح المطابقان لمقداري ء والمستخرجان من معادلة (٤) هما +٥ ، −٣ فحينئذ يحدث المتواليتان

÷ ٥ . ٧ . ٩ ، ÷ . −٣ . −١ . +١ . +٣ . +٥ . +٧ . +٩

وهاك جدولاً يشتمل على حل المسائل العشر المتقدمة ذكرناه هنا لمن يريد الممارسة في ذلك

عدد المسائل	معاليم	مجاهيل	مقادير المجاهيل	
١	ح ر ن	ل ج	ل = ح + (ن − ١) ر	ج = ن/٢ [٢ح + (ن − ١) ر]
٢	ج ر ن	ح ل	ح = (٢ج − ن (ن − ١) ر) / ٢ن	ل = (٢ج + ن (ن − ١) ر) / ٢ن
٣	ل ر ن	ح ج	ح = ل − (ن − ١) ر	ج = ن/٢ [٢ل − (ن − ١) ر]
٤	ح ل ن	ج ر	ج = ن/٢ (ح + ل)	ر = (ل − ح) / (ن − ١)
٥	ح ج ن	ل ر	ل = ٢ج/ن − ح	ر = ٢ (ج − ح ن) / ن (ن − ١)
٦	ل ج ن	ح ر	ح = ٢ج/ن − ل	ر = ٢ (ن ل − ج) / ن (ن − ١)
٧	ح ل ر	ن ج	ن = (ل − ح)/ر + ١	ج = (ل + ح)(ل − ح + ر) / ٢ر
٨	ح ج ر	ن ل	ن = (ر − ٢ح ± √((ر − ٢ح)² + ٨ر ج)) / ٢ر	ل = ح + (ن − ١) ر
٩	ل ج ر	ن ح	ن = (ر + ٢ل ± √((ر + ٢ل)² − ٨ر ج)) / ٢ر	ح = ل − (ن − ١) ر
١٠	ح ل ج	ن ر	ن = ٢ج / (ح + ل)	ر = (ل + ح)(ل − ح) / (٢ج − (ل + ح))

مسائل يطلب حلها من الطالب

بند ٩٧ الاولى المطلوب تعيين الحد الاول وعدد الحدود من متوالية عددية اساسها ٨ وحدها الأخير ١٨٥ وحاصل جمعها ٢٩٤٥

الثانية المطلوب ادخال تسعة أواسط عددية بين أي حدين من المتوالية

÷ ٢ . ٥ . ٨ . ١١ . ١٤ . ١٧

الثالثة

الثالثة المطلوب معرفة عدد طابور مثلثى صفه الاول نفر واحد والثانى نفران والثالث ثلاثة وهكذا الصف يكون عدد انفاره مساويا م

الرابعة المطلوب ايجاد حاصل جمع حدود المتوالية الفردية ÷ ١ , ٣ . ٥ . ٧ . ٩ .. التى عدد حدودها م

الخامسة طريق بعيدة عن تل رمل بمقدار ٤٠ مترا يراد ترميلها وقد عملت مقايسة ذلك فوجد انه يلزم لترميلها شحن مائة عربانة كل منها بعيدة عن مجاورتها بستة امتار بشرط ان يكون موضع العربانة الاولى على بعد من التل يساوى ٤٠ مترا وان ترجع العربانة الاخيرة الى المحل الذى شحنت منه والمطلوب معرفة عدد الأمتار التى يقطعها ساق العربانات فى ترميل الطريق المذكورة

السادسة راجل يقطع عشرة فراسخ فى اليوم الواحد وفارس يقطع فى اول يوم ثلاثة فراسخ ويزيد سيره فى كل يوم عن سابقه فرسخين سارا فى آن واحد والمطلوب معرفة عدد الأيام التى تمضى من ابتداء سيرهما لنقطة تلاقيهما والمسافة التى يقطعها كل منهما

فى المتواليات التغييرية أى الهندسية

كل متسلسلة مركبة من جملة حدود متتابعة خارج قسمة أحدها على سابقه ثابت أو كل حد منها مساو لسابقه مضروبا فى كمية ثابتة تسمى متوالية والكمية الثابتة تسمى اساس المتوالية

ومتى عد تعريف تكون متوالية تصاعدية أو تنازلية يجب أساسها أي يجب كونه اكبر من الواحد أو أصغر منه فحينئذ تكون المتوالية

$$÷\ ٣ : ٦ : ١٢ : ٢٤ : ٤٨ : ٩٦$$ تصاعدية

والمتوالية

$$÷\ ٦٤ : ١٦ : ٤ : ١ : \frac{١}{٤} : \frac{١}{١٦} : \frac{١}{٦٤}$$ تنازلية

ويلفظ بها كالتلفظ بالمتوالية العددية وكل متوالية هندسية توضع هكذا

$$÷\ ح : ء : ه : و : ى : ع : ط : \ldots\ ل$$

فاذا رمزنا بالحرف ر لاساسها وبالحرف ل لحدها الأخير المسبوق بحدود عددها م ـ ١ نحصل

$$ء = ح ر \quad ، \quad ه = ح ر^{٢} \quad ، \quad و = ح ر^{٣} \ \ldots\ldots\ ل = ح ر^{م-١}$$

وحيث أن القانون $ل = ح ر^{م-١}$ ...... (١) مشتمل على الكميات الاربع ح ، ر ، م ، ل يمكن تعيين احداها بمعرفة الثلاث الاخرى فاذا يكون الحد الأخير من متوالية هندسية مساويًا لحاصل ضرب الحد الاول في الاساس مرفوعًا لدرجة مساوية لعدد الحدود السابقة له

فاذا اريد مثلًا تعيين الحد الثامن من المتوالية

$$÷\ ٢ : ٦ : ١٨ : ٥٤$$

فانه يحصل $٢ \times ٣^{٧} = ٢ \times ٢١٨٧ = ٤٣٧٤$ وهو الحد الثامن المطلوب

واذا اريد تعيين الحد الثاني عشر من المتوالية

∵ ٦٤ : ١٦ : ٤ : ١ : $\frac{١}{٤}$ فانه يخص

$٦٤ \times (\frac{١}{٤})^{١١} = \frac{٤^٣}{٤^{١١}} = \frac{١}{٤^٨} = \frac{١}{٦٥٥٣٦}$ وهو الحد الثاني عشر المطلوب

ويستعمل القانون ل = ح ر^(ن-١) لادخال جملة حدود عددها م بين كميتين معلومتين ح ، ل لتتركب من الكل متوالية هندسية وحيث أن عدد الحدود المدخلة م يكون عدد حدود المتوالية المتحصلة م + ٢ ويكون الحد الأخير منها ل = ح ر^(م+٢-١) = ح ر^(م+١) ومنها يستخرج الأساس المجهول ر فيكون

$$ر = \sqrt[م+١]{\frac{ل}{ح}}$$

يعني أن الأساس يساوي جذر خارج قسمة الكميتين المعلومتين على بعضهما بدرجة تساوي م + ١

فاذا اريد مثلاً ادخال أربعة حدود بين العددين ٢ ، ٤٨٦ يوضع في مقدار ر بدل م ، ل ، ح مقاديرها وهي ٤ ، ٤٨٦ ، ٢ فيؤول الى ر = $\sqrt[٥]{\frac{٤٨٦}{٢}} = \sqrt[٥]{٢٤٣} = ٣$ وتركب المتوالية هكذا

∵ ٢ : ٢ × ٣ : ٢ × ٣^٢ : ٢ × ٣^٣ : ٢ × ٣^٤ : ٢ × ٣^٥ أي

∵ ٢ : ٦ : ١٨ : ٥٤ : ١٦٢ : ٤٨٦

• حاصل ضرب كل حدين متماثلي الوضع من طرفي متوالية هندسية واحدة

... زاد العدد م شيأ فشيأ نقصت الكمية ح^م/(١-ر) ... يمكن أخذ عدد م كبيرا بحيث يكون المقدار ح^م/(١-ر) أقل من كل كمية معلومة تعطى فلذلك كلما أخذت حدود أكثر من الحدود المتعاقبة للمتوالية بالابتداء من الحد الأول قرب مقدار ع من ح/(١-ر) فاذاً يمكن أخذ حدود كافية ليكون مجموعها مختلفاً عن ح/(١-ر) بقدر ما يراد وعليه فيقال أن نهاية حاصل جمع جملة حدود من المتوالية التنازلية بالابتداء من الحد الأول تكون مساوية للكسر ح/(١-ر) فاذا كانت الحدود المتوالية لانهائياً كان حاصل جمعها مساوياً ح/(١-ر) أى أن حاصل جمع حدود متوالية تنازلية عدد حدودها لانهائى يساوى خارج قسمة حدها الأول على فاضل الواحد والأساس

١٠٣ ويمكن تعيين هذا الحاصل من أول الامر بفرض المتوالية التنازلية التى عدد حدودها لانهائى هكذا

∴ ح : د : هـ : و : .... الخ ومنها يحدث

د = ح ر ، هـ = د ر ، و = هـ ر ، ....

ثم نجمع هذه المتساويات الأخيرة طرفاً الى طرف فيحصل

د + هـ + و + ... الخ = (ح + د + هـ + ... الخ) ر

وحيث أن الطرف الأول من هذه المتساوية الأخيرة يساوى حاصل جمع حدود المتوالية المذكورة ما عدا الحد الأول أى يساوى ع − ح وأن الطرف الثانى

يساوى

يساوي مجموع حدوده مكرراً بقدر الأساس ر (ن ر) ثم يساوي ∴ يكون

ج − ح = ج ر أو ج (١ − ر) = ح ومنها يحدث

$$ج = \frac{ح}{١ - ر}$$

وهو مقدار مجموع حدود المتوالية المذكورة لأنه اذا اجريت عملية القسمة على المقدار

$\frac{ح}{١-ر}$ حدث ∴ ح : ح ر : ح ر^٢ : ح ر^٣ .... الخ وهو ناتج غير مخالف

للمتوالية ∴ ح : ء : هـ : و .... الخ المفروضة الا في تبديل الحدود

ح ، ء ، هـ ..... الخ بمقاديرها المبينة بدلالة الحد الاول والاساس

بند ١٠٩ وهناك حالة غريبة حادثة من فرض ح = ١ ، ر = ٢ في المعادلة

$$\frac{ح}{١-ر} = ح + ح ر + ح ر^٢ + ...\ الخ$$

وهي أنه بعد اجراء الفرض المتقدم يحصل

$$\frac{١}{١-٢}\ أو\ -١ = ١ + ٢ + ٤ + ٨ + ...\ الخ$$

وهو ناتج فاسد لان الطرف الاول من المعادلة المتقدمة سالب والثاني موجب

وأكبر من الأساس فلتصحيح هذا الناتج يلزم لحصول التعادل في

$$\frac{ح}{١-ر} = ح + ح ر + ح ر^٢ + ...\ الخ$$

أن يكمل خارج القسمة فاذا اجري العمل الى الحد الرابع من خارج القسمة مثلاً يحدث

$$\frac{ح}{١-ر} = ح + ح ر + ح ر^٢ + ح ر^٣ + \frac{ح ر^٤}{١-ر}$$

وباجراء الفرض المتقدم في هذه المعادلة يحدث

١٤١٣٥ ٢٣٦٠٧١٨٠٨٠ فرنكا

الثانية مريض وهب لمريض آخر في مرض موته عبدًا له فوهبه الآخر في مرض موته
للاول ولا شيء لهما سواه وحيث أن هبة مرض الموت لا تنفذ الا في الثلث ان كانت لغير وارث
وله ولم يجزها باقي الورثة يكون للموهوب له $\frac{1}{3}$ العبد وللواهب ثلثاه وبهبته للموهوب
له يرجع للواهب من هذا الثلث ثلثه وبناء عليه فقد زاد ماله وزادت هبته للموهوب
له ومتى زادت هبته للآخر حصل له زاد مال الواهب الاول وبناء عليه يزيد مال الموهوب
له وهكذا فاذا يلزم الدور والمطلوب تعيين ما يخص كلا من المريضين في
العبد المذكور

فالجواب أن يفرض ثمن العبد أو نفسه مساويًا للواحد فيكون مقدار ما وهبه الاول
منه مساويًا $\frac{1}{3}$ ومقدار هبة الموهوب له مساوية ثلث الثلث وبناء عليه تكون
حصة الواهب الاول $\frac{2}{3}+\frac{1}{9}$ وحصة الموهوب له $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}$ وحيث زاد
مال الواهب الاول ثلث الثلث أي $\frac{1}{9}$ يرجع للواهب الثاني ثلث $\frac{1}{9}$ أي $\frac{1}{27}$
فاذن تكون

حصة الواهب الأول $\frac{2}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}$

وحصة الواهب الثاني $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$

وحيث زاد مال الواهب الثاني بمقدار ثلث التسع اى $\frac{1}{27}$ يرجع للواهب الاول منها
ثلثها وهو $\frac{1}{81}$ فاذًا تكون

حصة الواهب الاول $\frac{2}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$

وحصة الواهب الثانى $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81}$

وحيث زاد للواهب الاول $\frac{1}{81}$ من العبد يرجع للواهب الثانى منه ثلثه أى $\frac{1}{243}$ وبناءً عليه تكون

حصة الواهب الاول $\frac{2}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243}$

وحصة الواهب الثانى $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ وهكذا

فقد نشأ من هذه الهبة الدور والتسلسل فاذاً تكون حصة كل منهما مساوية لفاضل حاصلى جمعى متواليتين تنازليتين غير نهائيتين فمتواليتا الواهب الثانى

$\therefore \frac{1}{3} : \frac{1}{27} : \frac{1}{243} : \ldots\ldots$ الخ و $\therefore \frac{1}{9} : \frac{1}{81} : \ldots\ldots$ الخ

ومنها ينتج أن حصته الحقيقية مساوية $\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

فغدا الثلث الذى هو حصة الواهب الثانى الربع وبناءً عليه تكون

حصة الواهب الاول ثلاثة ارباع

فاذا اريد تعيين حصة الواهب الأول اجرى العمل المذكور فى تعيين حصة الواهب الثانى

الثالثة أحد المصورين عنده ٨ صور يريد بيعها فدفع له فى كل واحدة ١٥٠ غرشاً مرة واحدة ثم دفع له فى أقلها حسناً ثمن قدره خمسة غروش

[illegible] بتضعيف [illegible] والمراد معرفة

[illegible]

([illegible] تبع [illegible] دج)

جرة مملوءة من النبيذ تحتوي على مائة اقة صار يؤخذ منه كل يوم اقة واحدة

ويضاف إليه اقة ماء بدلها والمطلوب معرفة عدد مرات تكرار هذا الفعل

حتى لا يبقى من النبيذ الا الربع

(الجواب أنه لابد من تكرار الفعل ١٨٣ مرة)

في المتباينات

لما كانت شروط مناقشة مسألة مؤسسة في الغالب على المتباينات لزم

بيان قواعدها ونتائجها أن نطبق عليها المزيد اختصارها قواعد التحويلات

التي اجريت على المعادلات

هذا وان كانت القواعد التي تنبني عليها هذه التحويلات بديهية لا تحتاج

لتوضيح الا انه اقتضى الحال توضيحها هنا تجنبا للوقوع في التحويلات

غير الصحيحة عندما يكون طرفا المتباينة سالبين

ومن البديهي أنه متى كانت كميتا ح ، ء موجبتين وكان ح > ء

كان الفاضل ح - ء موجبا ومبينا هكذا ح - ء > ٠

ومتى كانت كمية ح موجبة و ء سالبة كان ح > ء لان الكمية الموجبة

و (د) تتغير المباينة متى ضرب كل من طرفيها فى كمية واحدة موجبة أو قسم كل منهما عليها

فاذا فرضنا الكمية الموجبة المعلومة م آلت المباينة حـ > ء الى حـ م > ء م و $\frac{ح}{م} > \frac{ء}{م}$ لانه لما كان الفرق حـ - ء موجبا كان حاصل ضربه فى م أو خارج قسمته عليه موجبا أيضا أعنى ان كلا من م حـ - ء م و $\frac{ح}{م} - \frac{ء}{م}$ يكون موجبا

ويمكن البرهنة أيضا على هذه القاعدة بأن يقال أن حاصل ضرب الكميتين هـ و ء فى الكمية الموجبة م أو خارج قسمتهما عليها لا يختلف فى العلامة عن الكميتين المفروضتين وتكون النسبة بين أصلى حاصل الضرب أو خارج القسمة كالنسبة بين الكميتين هـ و ء المذكورتين

ومتى ضرب طرفا مباينة فى كمية سالبة أو قسما عليها قلبت اشارتها لان هذا يؤول الى ضرب المباينة فى كمية مطلقة وتغيير علامات جميع حدودها

١٠٩ ومتى كان المجهول الداخل فى مباينة بدرجة أولى أمكن تحويلها الى صورة بحيث يكون هذا المجهول داخلا فى احد الطرفين بمكرر مساو للواحد كما تقدم فى حل المعادلة ذات الدرجة الاولى

فاذا فرضنا المباينة

وما مقدار −١ فهو نهاية كبرى لمجهول المتباينة الثالثة وينتج منه أن
مقادير مفروضة لمجهول س تكون كلها رقمية سالبة تزيد عن ١
وإذا كان مجهول س محققا للمتباينتين الاولى والثانية معا كانت محصورة
بين $\frac{٢}{٥}$ و $\frac{١١}{٩}$ وإذا كان محققا للمتباينة الثانية والثالثة معا
كان محققا لشرط س $<$ −١ وبالجملة فلا يوجد مقدار لمجهول س
يكون محققا للمتباينة الاولى والثالثة معا

١١١ ونعتبر الآن حالة دخول مجهولي س ,ص بدرجة اولى في المتباينتين

$$\text{٢س} - \text{٢ص} > ٥ \quad \text{و} \quad \text{٥س} + \text{٣ص} > ١٦$$

فينتج منهما

$$\text{س} > \frac{٥ + \text{٢ص}}{٢} \ , \ \text{س} > \frac{١٦ - \text{٣ص}}{٥}$$

فاذا فرض للمجهول ص أي مقدار اختياري أمكن أن يفرض للمجهول س
جميع المقادير التي تزيد عن اكبر الكميتين

$$\frac{٥ + \text{٢ص}}{٢} \ , \ \frac{١٦ - \text{٣ص}}{٥}$$

ويستنتج أيضا من المتباينتين المذكورتين أن

$$\text{ص} < \frac{\text{٢س} - ٥}{٢} \ , \ \text{ص} > \frac{١٦ - \text{٥س}}{٣}$$

ويلزم لتحقيق ذلك أن يكون

$$\frac{\text{٢س} - ٥}{٢} > \frac{١٦ - \text{٥س}}{٣}$$

ومن

وحينئذٍ يكون

ه + هَ + هً + ... > (د + دَ + دً + ...) ك

ه + هَ + هً + ... < (د + دَ + دً + ...) كَ

ومن هنا يحدث

$\frac{\text{ه + هَ + هً + ...}}{\text{د + دَ + دً + ...}}$ > ك

$\frac{\text{ه + هَ + هً + ...}}{\text{د + دَ + دً + ...}}$ < كَ وحينئذٍ يثبت المطلوب

مسائل تحل بواسطة المتباينات

الاولى ما العدد الذي اذا طرح من ضعفه ٥ كان الباقي اكبر من ٢٥ واذا طرح من ثلاثة امثاله ٧ كان الباقي اكبر من ضعفه زائداً ١٣

لحل هذه المسئلة يقال اذا رمز للعدد المجهول بالرمز س تحصل

٢س − ٥ > ٢٥

٣س − ٧ > ٢س + ١٣ ومنهما ينتج

س > ١٥ ، س > ٢٠

أعني أن كل عدد اكبر من ٢٠ يكون حلاً للمسئلة وحينئذٍ يكون عدد الحلول غير منتهٍ

الثانية ما العدد الذي اذا طرح من ضعفه ٥ كان باقي الطرح اكبر من ٢٥ واذا طرح من ثلاثة امثاله ٧ كان الباقي أصغر من ضعف

ثانية ١٣

لحل هذه المسئلة يقال اذا رمز للعدد المجهول بالرمز س تحصل

٢س − ٥ > ٢٥ ، ٣س − ٧ < ٢س + ١٣ ومنهما يحدث

س > ١٥ ، س < ٢٠

أعني أن مقدار المجهول س يكون محصورًا بين العددين ١٥ ، ٢٠ ويكون عدد الحلول محدودًا

الثالثة ما العدد الذي اذا نقص من ضعفه ٥ كان الباقي أصغر من ٢٥ واذا نقص من ثلاثة امثاله ٧ كان الباقي أكبر من ضعفه زائدًا ١٣

لحل هذه المسئلة يقال اذا رمز بالرمز س للعدد المجهول تحصل

٢س − ٥ < ٢٥ و

٣س − ٧ > ٢س + ١٣ ومنهما يحدث

س < ١٥ ، س > ٢٠

وحيث أن هذا غير ممكن فالمسئلة مستحيلة

الرابعة سئل احد الرعاة عن عدد ما يرعاه من الغنم فأجاب أنه اذا نقص من ضعف غنمه ٥ كان الباقي أكبر من ٢٥ واذا نقص من ثلاثة امثاله ٧ كان الباقي أصغر من ضعفه زائدًا ١٣ والمطلوب معرفة عدد ما يرعاه من الغنم

لذلك يقال اذا رمز لعدد الحصص [illegible] تحصل

٤ س − ٥٠ > ٥٤ [illegible] ومنها ينتج

س > ١٥ و س < ٢٠

وحينئذٍ فجميع المقادير المحصورة بين ١٥ و ٢٠ تكون حلاً للمسئلة وحيث أن الحل المطلوب صحيح فيكون لهذه المسئلة اربعة حلول هي

١٦ , ١٧ , ١٨ , ١٩

الخامسة سئل رجل عن عمره فأجاب أنه اذا ضم لثلاثة امثاله ٢ كان الحاصل أكبر من ضعفه زائدًا ٦١ واذا طرح من خمسة امثاله ١٨ كان الباقي أصغر من أربعة امثاله مضافاً اليه ٤٣

لذلك يقال اذا رمز لعمره بالرمز س تحصل

٣ س + ٢ > ٢ س + ٦١ و

٥ س − ١٨ < ٤ س + ٤٣ ومنها يحدث

س > ٥٩ , س < ٦١

أعني أن عدد عمره يكون محصورًا بين ٥٩ و ٦١ فان كان العمر المطلوب تعيينه عددًا صحيحًا كان ٦٠ سنة بلا خلاف

في الكسور المتسلسلة

بند ١١٦ كل مقدار مركب من عدد صحيح ومن كسر بسطه صحيح ومقامه مركب من صحيح

إن الكسر بسطه صحيح ومقامه مركب من صحيح مضافاً اليه كسر بسطه صحيح ومقامه كذلك يسمى كسراً متسلسلاً

مثال ذلك الكمية

$$\text{ح} + \cfrac{\text{ح}'}{\text{ء} + \cfrac{\text{ء}'}{\text{ه} + \cfrac{\text{ه}'}{\text{و} + \cfrac{\text{و}'}{\text{ح} + \text{ح}'}}}}$$

تسمى كسراً متسلسلاً سواء كانت الكميات ح، ء، ه ..... ح، ح'، ء'، ه' ..... ح' الدالة على أعداد صحيحة موجبة أو سالبة وباجراء عمليات الحساب الموجودة في هذه الكمية يتوصل الى كسر اعتيادي مساوٍ لقيمة الكسر المتسلسل

فاذا فرض الكسر المتسلسل $٣ + \cfrac{٢}{٥ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{٣}{٤}}}$ تحصل على التوالي

$$١ + \frac{٣}{٤} = \frac{٧}{٤} \quad , \quad \cfrac{١}{١ + \cfrac{٣}{٤}} = \frac{٤}{٧} \quad , \quad ٥ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{٣}{٤}} = ٥ + \frac{٤}{٧} = \frac{٣٩}{٧} \quad \text{و}$$

$$\cfrac{٢}{٥ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{٣}{٤}}} = \cfrac{٢}{\cfrac{٣٩}{٧}} = \frac{١٤}{٣٩} \quad , \quad ٣ + \cfrac{٢}{٥ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{٣}{٤}}} = ٣ + \frac{١٤}{٣٩} = \frac{١٣١}{٣٩}$$

لكنه يفرض لسهولة العمل أن بسط كل من الكسور التي يتركب منها الكسر المتسلسل يكون مساوياً للواحد أعني أنه يفرض أن كلاً من ح'، ء'، ه' ..... يكون مساوياً للواحد وحينئذ يؤول الكسر المتسلسل المذكور الى

$$\text{ح} + \frac{١}{}$$

$$ح + \cfrac{1}{د + \cfrac{1}{هـ + \cfrac{1}{و + \dots}}}$$

... على عدد صحيح ... وحدة

١١ لكون المتسلسلة تحدث بالصورة المتقدمة عند ما يراد تحويل كمية كسرية أو كمية غير جذرية الى عدد بحيث يكون مقداره مقربا بأقل من الواحد لأنه اذا اريد تقدير كمية حينئذ اتفق كالكمية التي لا يمكن بيانها بعدد صحيح فانه يبحث في مبداء الأمر عن العدد الصحيح الذي يقرب من مقدارها وليكن ح مثلا فيكون الفرق س − ح كسرا اقل من الواحد ويرمز له بالكسر $\frac{1}{ص}$ حتى يفرض ص عددا صحيحا اكبر من الواحد ثم يبحث عن العدد الصحيح د الذي يقرب من مقدار ص فيكون الفرق ص − د أقل من الواحد ويرمز له بالكسر $\frac{1}{ع}$ بفرض ع عددا صحيحا اكبر من الواحد وعلى هذا المنوال يتحصل

$$س = ح + \frac{1}{ص} \,,\quad ص = د + \frac{1}{ع} \,,\quad ع = هـ + \frac{1}{ر} \,,\quad ر = و + \frac{1}{م}$$ ونحو ذلك

ومن هنا ينتج

$$س = ح + \cfrac{1}{د + \cfrac{1}{هـ + \cfrac{1}{و + \dots}}}$$

فان كانت احدى هذه الكميات س، ص، ع، ر، م مبينة بعدد صحيح

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cdots}}$$

وحيث ان البحث عن القاسم المشترك الاعظم [illegible]

بل الى خارج قسمة مبين بعدد صحيح فيمكن تحويل كمية منتهية [illegible]

ذلك كل كسر متسلسل منته يمكن تحويله الى كمية منطقة [illegible]

متى كان كسر متسلسل محدوداً أمكن تحويله دائماً الى كسر [illegible]

القيمة ويؤخذ من ذلك أنه متى اريد تحويل كمية غير جذرية [illegible]

كان هذا الكسر غير منته

بند ١١ لبيان تحويل كمية غير جذرية الى كسر متسلسل كالكمية

$$\frac{3+\sqrt{7}}{2}$$

يقال حيث أن الجذر التربيعي للرقم ٧ محصور بين العددين ٢ و ٣

فالكمية المفروضة تكون محصورة بين $\frac{5}{2}$ و $\frac{6}{2}$ ويكون العدد الصحيح [illegible]

هي عليه هو ٢ وحينئذ يوضع

$$\frac{3+\sqrt{7}}{2} = 2 + \frac{1}{ص}$$ ومنها يحدث

$$\frac{1}{ص} = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$$ أو $$ص = \frac{2}{\sqrt{7}-1} = \frac{2(\sqrt{7}+1)}{6} = \frac{\sqrt{7}+1}{3}$$

وحيث أن الجذر التربيعي للرقم ٧ محصور بين ٢ و ٣ فيكون [illegible]

ن محصورًا بين $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٤}{٣}$ وحينئذ يوضع

$ض = \frac{\sqrt{٧}+١}{٣} = ١ + \frac{١}{ع}$ ومنها يحدث

$\frac{١}{ع} = \frac{\sqrt{٧}-٢}{٣}$ أو $ع = \frac{٣}{\sqrt{٧}-٢} = \sqrt{٧}+٢$

وبإجراء عين العمل المتقدم يتحصل

$ث = \sqrt{٧}+٢ = ٤ + \frac{١}{ر}$ ن

$\frac{١}{ر} = \sqrt{٧}-٢$ ، ومنها $ر = \frac{١}{\sqrt{٧}-٢} = \frac{\sqrt{٧}+٢}{٣} = ١ + \frac{١}{ع}$ ن

$\frac{١}{ع} = \frac{\sqrt{٧}-١}{٣}$ ومنها $ع = \frac{٣}{\sqrt{٧}-١} = \frac{\sqrt{٧}+١}{٢} = ١ + \frac{١}{ل}$ ن

$\frac{١}{ل} = \frac{\sqrt{٧}-١}{٢}$ ومنها $ل = \frac{٢}{\sqrt{٧}-١} = \frac{\sqrt{٧}+١}{٣}$ وحينئذ يكون ل = ض

وعلى ذلك فقد تحللت الكمية $\frac{\sqrt{٧}+٢}{٢}$ بموجب هذا الحساب

الى الكسر المتسلسل

$$١ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{٤ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{٤ + ض}}}}}}$$

الدوري حيث كانت المقامات الأربعة ١ ، ٤ ، ١ ، ١ دائرة مع العمل

بتدو لنعتبر الآن الكسر المتسلسل الحرفي

١١٧

$ح + \frac{١}{١+ ...}$

$$\text{ح} + \cfrac{1}{\text{د} + \cfrac{1}{\text{هـ} + \cfrac{1}{\text{و} + \text{الخ}}}}$$

فنحصل بمقتضى قواعد الكسور

$$\text{ح} = \frac{\text{ح}}{1} ,\quad \text{ح} + \frac{1}{\text{د}} = \frac{\text{ح د} + 1}{\text{د}} ,\quad \text{ح} + \cfrac{1}{\text{د} + \cfrac{1}{\text{هـ}}} = \frac{(\text{ح د} + 1)\,\text{هـ} + \text{ح}}{\text{د هـ} + 1}$$

$$\text{ح} + \cfrac{1}{\text{د} + \cfrac{1}{\text{هـ} + \cfrac{1}{\text{و}}}} = \frac{\{(\text{ح د} + 1)\,\text{هـ} + \text{ح}\}\,\text{و} + \text{ح د} + 1}{(\text{د هـ} + 1)\,\text{و} + \text{د}}$$

فاما الكسور $\frac{\text{ح}}{1} , \frac{\text{ح د} + 1}{\text{د}} , \frac{(\text{ح د} + 1)\,\text{هـ} + \text{ح}}{\text{د هـ} + 1} , \frac{\{(\text{ح د} + 1)\,\text{هـ} + \text{ح}\}\,\text{و} + \text{ح د} + 1}{(\text{د هـ} + 1)\,\text{و} + \text{د}}$

فهى المعروفة بالكسور المقربة أو الآئلة

وأما الكسور $\frac{\text{ح}}{1} , \frac{1}{\text{د}} , \frac{1}{\text{هـ}}$ تسمى بالكسور المكملة

وأما كميات ح , د , هـ فتسمى فى بعض الأحيان بالخوارج غير التامة

بيان سبب هذه التسمية

وبالتأمل فى الأمثلات المتقدمة يشاهد أن بسط الآئلة الثالثة يتركب من

حاصل ضرب بسط الآئلة التى قبلها فى مقام الكسر المكمل الأخير زائدا بسط

الآئلة التى قبلها بمرتبتين ومقام الآئلة المذكورة مركب من حاصل ضرب

مقام الآئلة التى قبلها فى مقام الكسر المكمل الأخير زائدا مقام الآئلة التى

قبلها بمرتبتين ويتركب كل من بسط ومقام الآئلة الرابعة بكيفية التى

تتركب بها الآئلة الثالثة وبهذه المثابة تتركب كل آئلة

ولبيان تعميم هذه القاعدة يبرهن على انها اذا كانت موافقة لثلاث آئلات متوالية من أي رتبة كانت فانها تكون موافقة للآئلة الرابعة التالية لها ولذا نرمز للآئلات الاربع المتوالية بالرموز

$$\frac{\text{ع}}{\text{ع}'} \;,\; \frac{\text{ك}}{\text{ك}'} \;,\; \frac{\text{ر}}{\text{ر}'} \;,\; \frac{\text{ل}}{\text{ل}'}$$

ثم نرمز بالرمز $\text{ر}''$ لمقام الكسر المكمل الأخير للآئلة $\frac{\text{ر}}{\text{ر}'}$ وبالرمز $\text{ل}''$ لمقام الكسر المكمل الأخير للآئلة $\frac{\text{ل}}{\text{ل}'}$ ثم نفرض أن

$$\text{ر} = \text{ك}\,\text{ر}'' + \text{ع} \qquad , \qquad \text{ر}' = \text{ك}'\,\text{ر}'' + \text{ع}'$$

فيتحصل مقدار الآئلة $\frac{\text{ل}}{\text{ل}'}$ من $\frac{\text{ر}}{\text{ر}'}$ بأن يوضع فيها بدل $\text{ر}''$ الكمية $\text{ر}'' + \frac{1}{\text{ل}''}$ فيحدث

$$\frac{\text{ل}}{\text{ل}'} = \frac{\text{ك}(\text{ر}'' + \frac{1}{\text{ل}''}) + \text{ع}}{\text{ك}'(\text{ر}'' + \frac{1}{\text{ل}''}) + \text{ع}'} = \frac{\text{ل}''(\text{ك}\,\text{ر}'' + \text{ع}) + \text{ك}}{\text{ل}''(\text{ك}'\,\text{ر}'' + \text{ع}') + \text{ك}'} = \frac{\text{ر}\,\text{ل}'' + \text{ك}}{\text{ر}'\,\text{ل}'' + \text{ك}'} \,.$$

وحينئذ يشاهد أن الآئلة $\frac{\text{ل}}{\text{ل}'}$ لا تختلف في التركيب عن الآئلات التي قبلها وبمثل هذا يبرهن على أن تركيب كل آئلة يكون حاصلاً بمقتضى هذه القاعدة وبناء عليه فهي مطردة .

فاذا اريد حساب آئلات الكسر المتسلسل .

$$١ + \cfrac{١}{٤ + \cfrac{١}{٩ + \cfrac{١}{٢ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{٤}}}}}}$$

فانه يبدء بتركيب الآئلتين الأوليين اللتين بواسطتهما تركب الآئلات الآتية بعدها بمقتضى القاعدة المتقدمة وعليه يتحصل

$$\frac{١}{١} ، \frac{٥}{٤} ، \overset{٩}{\frac{٤٦}{٣٧}} ، \overset{٢}{\frac{٩٧}{٧٨}} ، \overset{١}{\frac{١٤٣}{١١٥}} ، \overset{١}{\frac{٢٤٠}{١٩٣}} ، \overset{٤}{\frac{١١٠٣}{٨٨٧}}$$

وذلك بأن توضع على استقامة واحدة الخوارج غير التامة ٩، ٢، ١، ١، ٤ ثم يضرب حدا الآئلة الثانية وهما ٥ ، ٤ في ٩ ثم يضم على التوالي للحاصلين الناتجين من ذلك حدا الآئلة الاولى وهما ١ ، ١ فيتحصل حدا الآئلة الثالثة وهما ٤٦ ، ٣٧ ولايجاد حدى الآئلة الرابعة يضرب حدا الآئلة الثالثة وهما ٤٦ ، ٣٧ في ٢ ويضم للحاصلين على التعاقب حدا الآئلة الثانية أي يضم العدد ٥ للحاصل الاول والعدد ٤ للثاني فيتحصل حدا الآئلة الرابعة المطلوبة وهما ٩٧ ، ٧٨

ولايجاد الآئلة الخامسة والسادسة الخ يجرى العمل بهذه المثابة وحينئذ تكون الآئلة الأخيرة دالة دائما على القيمة الحقيقية للكسر المتسلسل المفروض.

ومتى كان الكسر المتسلسل المفروض غير محتو على عدد صحيح أخذ المقدار

بدل الآتلة الاولى

بند ١١٨ مقدار الكسر المتسلسل يكون محصورًا دائمًا بين آتلتين متواليتين ولذا نفرض الكسر المتسلسل الحرفي

$$ح + \cfrac{1}{ء + \cfrac{1}{هـ + \cfrac{1}{و + ...}}}$$

ثم نرمز لمقداره الحقيقي بالرمز س فيشاهد أن الآتلة الاولى $\frac{ح}{1}$ تكون اصغر من المقدار س حيث حذف الجزء الموجب $\frac{1}{ء + ...}$ من مقدار س ويشاهد ايضًا أن الآتلة الثانية $ح + \frac{1}{ء}$ تكون اكبر من س حيث انه قطع النظر فيها عن جزء من المقام $ء + \frac{1}{هـ + ...}$ وبمثل هذا يبرهن على باقي الآتلات الآتية

ويمكن البرهنة بوجه عام على منطوق هذه الخاصية بان يقال لاستخراج مقدار س من مقدار $\frac{ك}{ك'}$ المساوى $\frac{ك' ر'' + ح}{ك' ر'' + ع}$ يغير فيه الرمز ر'' بالمقدار $ر'' + \frac{1}{ل' + ...}$ الذي هو موجب دائمًا واكبر من الواحد فيحصل بعد جعل ص رمزًا للكمية $ر'' + \frac{1}{ل' + ...}$

$$س = \frac{ك' ص + ح}{ك' ص + ع} \quad ...... (1)$$

واذا طرحت الآتلتان $\frac{ح}{ع}$ ، $\frac{ك}{ك'}$ احداهما بعد الاخرى من كل من طرفي معادلة (1) حدث

$$س - \frac{ح}{ع} = \frac{(ك ع - ك ح) ص}{(ك س + ع) ع} \quad , \quad س - \frac{ح}{ك} = \frac{ح ك - ك ح}{(ك س + ع) ك}$$

وبالتأمل فى هاتين المتساويتين يشاهد أن فرقى $س - \frac{ح}{ع}$, $س - \frac{ح}{ك}$ متخالفان فى العلامة فان كان س أكبر من $\frac{ح}{ع}$ كان أصغر من $\frac{ح}{ك}$ وان كان س أصغر من $\frac{ح}{ع}$ كان أكبر من $\frac{ح}{ك}$ وحيث أن الأثلة الأولى $\frac{ح}{ا}$ أصغر من س تكون كل من الأثلات ذات المرتبة الفردية أصغر من مقدار الكسر المتسلسل وكل من الأثلات ذات المرتبة الزوجية أكبر منه

بند ١١٩ المقدار المطلق للفرق $س - \frac{ح}{ك}$ أقل من المقدار المطلق للفرق $س - \frac{ح}{ع}$ لأن ص أكبر من الواحد , ك اكبر من ع وحينئذ تكون كل أثلة اقرب الى مقدار الكسر المتسلسل من الأثلة التى قبلها ولذا سميت الأثلات بالكسور المقربة وينتج من ذلك أن الأثلات ذات المرتبة الفردية يتكون منها متسلسلة تصاعدية وذات المرتبة الزوجية متسلسلة تنازلية

بند ١٢٠ الفرق بين أثلتين متواليتين يساوى كسرًا اعتياديًا بسطه الواحد ومقامه حاصل ضرب مقام هاتين الأثلتين لانه اذا فرضت الأثلتان $\frac{ح}{ا}$, $\frac{ح د + ١}{د}$ كان الفرق بينهما مساويًا $\frac{١}{د}$ أعنى $\frac{ح د + ١}{د} - \frac{ح}{ا} = \frac{١}{د}$ ونتبرهن هذا برهن على باقى الفروق

ويمكن تعميم البرهنة على ذلك أيضًا بأن يقال اذا كانت هذه القاعدة موافقة لأثلتين متواليتين من أى مرتبة كالأثلتين $\frac{ح}{ع}$. $\frac{ح}{ك}$ كانت كذلك

موافقة للآيلتين المتواليتين $\frac{ك'}{ر'}$, $\frac{ك}{ر}$ وحيث تقدم أن

$$\frac{ك}{ر} = \frac{ك'ر'' + ع}{ر'ر'' + ع'} \quad \text{فيكون}$$

$$\frac{ك}{ر} - \frac{ك'}{ر'} = \frac{ك'ر'' + ع}{ر'ر'' + ع'} - \frac{ك'}{ر'} = \frac{ع ر' - ع' ك'}{ر'(ر'ر'' + ع')}$$

ويؤخذ من الفرض $\frac{ك'}{ر'} - \frac{ع}{ع'} = \pm \frac{1}{ر'ع'}$ أي $ك'ع' - ع ر' = \pm 1$ وبناء

عليه يكون $\frac{ك}{ر} - \frac{ك'}{ر'} = \mp \frac{1}{ر'ر}$ أعني $ر ك' - ك ر' = \mp 1$

(١٢١) الآيلات المركبة بمقتضى (بند ١١٧) هي كسور لا تقبل الاختصار لانه لو كان

لحدى الآيلة $\frac{ع}{ع'}$ مضروب مشترك لكان ينقسم كلا من طرفي المتساوية

$ع ك' - ع' ك = \pm 1$ ويكون بمقتضى ذلك قاسما للواحد وهذا خلاف

(١٢٢) وحيث تقدم أن مقدار الكسر المتسلسل محصور بين أي آيلتين متواليتين

كالآيلتين $\frac{ك'}{ر'}$, $\frac{ك}{ر}$ مثلاً فيكون الفرق بين هذا المقدار والآيلة $\frac{ك'}{ر'}$

دون الفرق بين الآيلتين $\frac{ك'}{ر'}$, $\frac{ك}{ر}$ وقد شوهد أن الفرق الأخير يساوي

المقدار $\frac{1}{ر'ر}$ فيكون الخطأ الحاصل في أخذ آيلة بدل المقدار التقريبي

للكسر المتسلسل دون المقدار $\frac{1}{ر'ر}$ أي دون الواحد مقسوما على حاصل

ضرب مقام هذه الآيلة في مقام التالية لها

ويمكن إيجاد نهاية الخطأ بغير دالة مقام الآيلة التالية للمفروضة لانه

يحصل بمقتضى ما تقدم $ر = ر'ر'' + ع'$ وحيث أن خارج القسمة $ر''$

غير التام لا يكون دون الواحد ابدا فلا يزيد الكسر $\frac{1}{ر ر'}$ في النهاية عن

$\frac{1}{ر'^2}$

$\frac{1}{ك'(ك'+ع)}$ ويكون الخطأ الحاصل أقل من هذا الكسر وحيث أن

$\frac{1}{ك'(ك'+ع)} < \frac{1}{ك'^2}$ فلا مانع من جعل الكسر $\frac{1}{ك'^2}$ نهاية للخطأ وهذه النهاية تؤثر على غيرها لكونها بسيطة

بند ١٢٣ يكفي لجعل الآثلة $\frac{ح'}{ك'}$ مختلفة عن مقدار كسر متسلسل بكمية دون الكسر المعلوم $\frac{م}{ع}$ أن يكون $\frac{1}{ك'^2} < \frac{م}{ع}$ فيحدث

$ك' > \sqrt{\frac{ع}{م}}$ أو في النهاية $ك' = \sqrt{\frac{ع}{م}}$

وينتج من ذلك أنه يمكن دائماً ايجاد المقدار الحقيقي أو المقربي لكمية مبينة بكسر متسلسل لانه ان كان الكسر المتسلسل منتهيًا امكن بيان مقداره بكسر اعتيادي وان كان غير منته امكن الوصول الى مقدار مقرب بجعل مقام الآثلة كسرًا بقدر ما يراد لكون مقامات الآثلات صحيحة لا تزال آخذة في الازدياد

بند ١٢٤ كل كسر متسلسل دائر يدل على احد جذري معادلة ذات درجة ثانية مكررات حدودها منطقة

وللبرهنة على ذلك بوجه عام نفرض كسرا متسلسلا مركبا من جزء غير دائر كسوره المكملة $\frac{ح}{1}$ ، $\frac{ء}{1}$ ...... ، $\frac{1}{ز}$ ، $\frac{1}{ع}$ ومن جزء دائر كسوره المكملة $\frac{1}{م}$ ، $\frac{1}{ح}$ ...... ، $\frac{1}{ر}$ ، $\frac{1}{ل}$ ثم نجعل ص رمزا للجزء الدائر فيكون

$$ص = م + \cfrac{1}{ج + \cfrac{1}{ر + \cfrac{1}{ل + \cfrac{1}{ص}}}} \qquad س = ه + \cfrac{1}{ذ + \cfrac{1}{ك + \cfrac{1}{ع + \cfrac{1}{ض}}}}$$

واذا جعل $\frac{ل}{ر}$ و $\frac{ل'}{ر'}$ رمزين للآئلتين المطابقتين للكسرين المكملين $\frac{1}{ر}$ و $\frac{1}{ل}$ في مقدار ص ، $\frac{ك}{ع}$ و $\frac{ك'}{ع'}$ رمزين للآئلتين المطابقتين للكسرين المكملين $\frac{1}{ك}$ ، $\frac{1}{ع}$ في مقدار س تحصل

$$ص = \frac{ل ص + ر}{ل' ص + ر'} \quad و \quad س = \frac{ع ص + ك}{ع' ص + ك'}$$

وبحذف ص من هاتين المعادلتين يتوصل الى معادلة ذات درجة ثانية محتوية على س الذى هو مقدار الكسر المتسلسل المفروض

ويلزم لمزيد الاختصار أن تحل بدل المعادلة ذات الدرجة الثانية الناتجة من حذف ص التى يستخرج منها للمجهول ص مقداران المعادلة

$$ص = \frac{ل ص + ر}{ل' ص + ر'} \quad أو \quad ل' ص^2 + (ر' - ل) ص - ر = 0$$

وحيث أن الحد الأخير من هذه المعادلة سالب فيكون أحد الجذرين سالبا ولا يؤخذ غير الموجب وبواسطة مقدار ص الموجب يسهل تعيين المقدار الموافق للمجهول س

١٤٠ يلزم في بعض الأحيان تحويل كمية غير جذرية مبينة بكسر اعشارى الى كسر متسلسل وحيث أن المقدار الاعشارى لا يمكن أخذه في هذه الحالة

بالضبط

عن حلول المسائل ذات الدرجة الاولى التي منطوقها غير كاف حتى يكون عدد المعادلات مبين عدد المجاهيل عند ما يفرض لهذه المجاهيل اعداد صحيحه موجبة أو سالبة أو موجبة فقط والمراد بالحلول الصحيحه الحلول التي تكون بها مقادير المجاهيل اعداد صحيحة

بند ١٤٧ ولذا نفرض المعادلة العمومية $ح س + د ص = ﻫ$ ذات الدرجة الاولى والمجهولين التي فيها $ح$ ، $د$ ، $ﻫ$ رموزاً لاعداد صحيحة موجبة أو سالبة فيمكن دائماً ان لا يكون لهذه الاعداد مضروب مشترك لانه ان كان لها مضروب مشترك امكن حذفه وحولت المعادلة المفروضة الى معادلة اخرى متحدة معها في الصورة الا انها اخصر منها فاذا تقرر هذا شوهد من أول وهلة انه اذا كان مكررا $ح$ ، $د$ غير أوليين معاً لا يكون للمعادلة المفروضة حل صحيح لانه ان كان لهما مضروب مشترك كالمضروب $م$ تحصل $ح = حَ م$ ، $د = م دَ$ (بفرض $حَ$ ، $دَ$ عددين صحيحين) فاذا وضع بدل $ح$ ، $د$ مقدارها في المعادلة المتقدمة وقسم كل من طرفيها على المضروب $م$ تحصل

$$حَ س + دَ ص = \frac{ﻫ}{م}$$

فاذا فرض للمجهولين $س$ ، $ص$ مقادير صحيحة كما هو المطلوب كان الطرف الاول من هذه المعادلة صحيحاً وحيث أن طرفها $\frac{ﻫ}{م}$ الثاني كسرية فه

فهي غير متحققة وينتج من ذلك أنه اذا كان مكررا $ح ، ء$ غير اوليين معًا لا يكون للمعادلة حل صحيح

١٢٨ ومتى كان مكررا $ح ، ء$ اوليين معًا كان للمعادلة $ح س + ء ص = هـ$

حلول صحيحة لانه اذا فرضنا الكميات $ح ، ء ، هـ$ موجبة وحلت المعادلة المذكورة بالنسبة للمجهول $س$ نحصل

$$س = \frac{هـ - ء ص}{ح}$$

فاذا رمزنا بالرمز $ع$ لعدد ما بحيث يكون $هـ = ح ع - هَ$
($هَ$ هو كناية عن عدد موجب) واستعوض $هـ$ بمقداره في مقدار $س$ حدث

$$س = ع - \frac{هَ + ء ص}{ح}$$

واذا فرضنا أن المجهول $ص$ اخذ بالتوالي كلا من المقادير
$٠ ، ١ ، ٢ ، ٣$ ... الى $ح - ١$ كانت البواقي للعادلة من قسمة $هَ + ء ص$ على $ح$
غير متساوية وكل واحد منها اصغر من $ح$ لانه لو جعل للمجهول $ص$ مقداران
مختلفان كل منهما أصغر من $ح$ كالمقدارين $م ، مَ$ وبهما توصل
الى باقيين متساويين لكان

$هَ + ء م = ح ك + ر$ ، $هَ + ء مَ = ح كَ + ر$ ومنهما يحدث

$$ء (م - مَ) = ح (ك - كَ)$$

وهذه المعادلة يؤخذ منها

$$\frac{ى(م-ن)}{ح} = ك - ك'$$

وحيث أن الطرف الثاني عدد صحيح فيكون الطرف الاول كذلك وبناء على ذلك يكون ى(م-ن) قابلاً للقسمة على ح وهذا محال لان ى اوليّ مع ح وكل من م , ن اصغر من ح ومن هنا يعلم أن احد البواقي الحادثة من قسمة ه+ى ص على ح يكون صفراً وعليه فيكون المجهول ص مقدار صحيح أقل من ح بواسطة يكون المجهول س مقدار صحيح فاذا كانت المعادلة بهذه الصورة

ح س − ى ص = ه فانه يستخرج منها

$$س = \frac{ه + ى ص}{ح}$$

ثم يبرهن على الكسر $\frac{ه+ى ص}{ح}$ بمثل ما برهن على الكسر المتقدم $\frac{ه+ى ص}{ح}$ لكنه يلاحظ انه يمكن استخراج حلول المعادلة ح س − ى ص = ه من حلول المعادلة ح س + ى ص = ه وذلك بتغيير علامة المجهول ص ومن هنا يؤخذ أنه متى كان للمعادلة الأخيرة حلول صحيحة كان للاخرى كذلك

١٢٩ ويمكن البرهنة على القضية المتقدمة في البند السابق بواسطة خواص الكسور المتسلسلة بأن نفرض المعادلة

ح س + ى ص = ه

ثم يحول الكسر ح/د الى كسر متسلسل ثم يرمز للأمثلة التي قبل الاخيرة بالرمز ع/ك فان كانت مرتبة هذه الآمثلة زوجية حدث

ح ع − د ك = ١ وبضرب من من طرفيها في هـ يحدث

ح ع هـ − د ك هـ = + هـ

وبالمقارنة بين هذه المتساوية والمعادلة ح س + د ص = هـ يشاهد أن هذه المعادلة تتحقق بجعل المجهول س = ع هـ والمجهول ص = − ك هـ

وان كانت مرتبة الامثلة ع/ك فردية تحصل

ح ع − د ك = −١ ومنها يحدث

− ح ع هـ + د ك هـ = + هـ

وبناء على ذلك تتحقق المعادلة ح س + د ص = هـ بأن [illegible]

س = − ع هـ , ص = ك هـ

وحينئذ يكون للمعادلة المفروضة حل صحيح

بند ١٤٧ متى علم حل صحيح للمعادلة ح س + د ص = هـ امكن [illegible] عدة حلول

لانه اذا فرض أن س = حَ , ص = دَ هو الحل المعلوم كان

ح حَ + د دَ = هـ وبطرح هذه المتساوية من المعادلة ح س + د ص = هـ

يتحصل

$$ه(س - ح') = ء(ح' - ص)$$

ولتحقق هذه المعادلة بالمقادير الصحيحة للمجهولين س ,ص يلزم أن يكون ء قاسمًا للحاصل ه(س - ح') وحيث كان ء اوليًا مع ه فيكون قاسمًا للكمية (س - ح') فاذا رمز لخارج القسمة بالرمز و كان س - ح' = ءو (بجعل و كناية عن عدد صحيح موجب او سالب) واذا استعوض في المعادلة المتقدمة س - ح' بالمقدار ءو حدث ء' - ص = هو وحينئذ يكون

$$س = ح' + ءو \quad ,\quad ص = ء' - هو$$

وأي مقدار موجب أو سالب يعوض لغير المعين و يؤخذ منه للمجهولين س ,ص مقداران صحيحان ويحققان للمعادلة المعروضة

ويشاهد من القانونين المتقدمين بعد أن يوضع فيهما على التوالي بدل المتغير و وأحد المقادير ٠ ,١ ,٢ ,٣ ...... الخ و -١ ,-٢ ,-٣ ,........ الخ أنه ينتج من مقادير المجهول س متوالية عددية اساسها مكرر ص ومن مقادير المجهول ص متوالية رقمية اساسها مكرر س

تنبيه ويمكن بواسطة ما تقدم أيضًا ايجاد الحلول الصحيحة لمعادلة ذات درجة اولى ومجهولين

مثلًا اذا فرضت المعادلة

٢٤ س + ٦٥ ص = ٢٤٣

وحول $\frac{٦٥}{٢٤}$ الى كسر متسلسل وتكونت الاثلاث المتوالية كان $\frac{١٩}{٧}$ مقدار الآثلة التى قبل الأخيرة وحيث كانت زوجية المرتبة فيكون

٢٤ × ١٩ − ٦٥ × ٧ = ١+ ومن هنا يحدث

٢٤ × ١٩ × ٢٤٣ − ٦٥ × ٧ × ٢٤٣ = ٢٤٣

وحينئذ يشاهد أن المعادلة المفروضة تتحقق بجعل

س = ١٩ × ٢٤٣ = ٤٦١٧ , ص = − ٧ × ٢٤٣ = − ١٧٠١

وبمقتضى ما تقدم فى (بند ١٢٨) تتعين جميع الحلول الصحيحة للمعادلة المفروضة بواسطة القوانين

س = ٤٦١٧ + ٦٥ و , ص = − ١٧٠١ − ٢٤ و

. س = ٤٦١٧ − ٦٥ و , ص = − ١٧٠١ + ٢٤ و

بند ١٣٢ وهناك طريقة اخرى غير مؤسسة على القضايا المتقدمة بواسطتها يتوصل من اول وهلة الى القانونين اللذين منهما تعلم جميع الحلول الصحيحة لمعادلة ذات درجة اولى ومجهولين

فاذا فرضت المعادلة ا س + ب ص = هـ وجعل فيها ا < ب وحلت بالنسبة للمجهول س تحصل

$$س = \frac{هـ - ب ص}{ا}$$

وبالرمز للخارج الصحيح من قسمة د على ح بالرمز ك وللباقي بالرمز ب

نحصل د = ح ك + ب ، س = − ك ص + (هـ − ب ص) / ح

ولكي يحدث من المقدار الصحيح المفروض للمجهول ص مقدار صحيح للمجهول

س يلزم أن يكون (هـ − ب ص) / ح عددًا صحيحًا اذا رمزنا له بالرمز و نحصل

(هـ − ب ص) / ح = و ∴ س = − ك ص + و

واذا استخرج مقدار ص من المعادلة (هـ − ب ص) / ح = و وجعل كَ

رمزًا للخارج الصحيح من قسمة ح على ب وجعل بَ رمزًا للباقي نحصل

ح = ب كَ + بَ ، ص = (هـ − ح و) / ب = − كَ و + (هـ − بَ و) / ب

وبمثل ما تقدم يتحصل ايضًا

(هـ − بَ و) / ب = وَ ، ص = − كَ و + وَ

وبتوالي هذا العمل على العددين ح ، د يشاهد أنه لا يختلف عن العمل

الذي يجري لايجاد القاسم المشترك الأعظم بينهما وحيث أنهما أوليان

معًا فيتوصل الى باقٍ مساوٍ للواحد

فاذا كان هذا الباقي حادثًا من تقسيم ب على بَ كان

ب = بَ كً + ١ وعليه فيكون و = (هـ − ب وَ) / بَ = − كً وَ + (هـ − وَ) / بَ

ومن فرض (هـ − وَ) / بَ = وً يحدث و = − كً وَ + وً ، وَ = هـ − بَ وً

ولتحصيل مقداري س و ص بدالة غير المعين وً يوضع المقدار هـ − بَ وً

يجب أن يكون (٣ − ٥ ص)/٢ عددًا صحيحًا فاذا رمز لهذا العدد غير المعين بالرمز و كان
(٣ − ٥ ص)/٢ = و ...... (٢) ∴ س = ١ − ٢ ص + و .... (٣)
وحينئذ فقد آل البحث عن الحلول الصحيحة للمعادلة (١) الى البحث عن الحلول الصحيحة
للمعادلة (٢) التي فيها مكررا المجهولين أبسط منهما في الاولى ومن المشاهد انه لا يمكن
استنتاج نحو من مشابه للمتقدم الا اذا حلت المعادلة بالنسبة للمجهول المتبوع بأصغر
مكرر وحينئذ اذا أجرى هذا العمل على المعادلة (٢) تحصل

ص = (٣ − ٢٤ و)/١٧ = − و + (٣ − ٧ و)/١٧

وحينئذ يلزم أن يكون (٣ − ٧ و)/١٧ عددا صحيحًا فاذا رمز له بالرمز وَ تحصل

(٣ − ٧ و)/١٧ = وَ .... (٤) ∴ ص = − و + وَ .... (٥)

واذًا فقد آل البحث عن الحلول الصحيحة للمعادلة (٢) الى البحث عن الحلول الصحيحة
للمعادلة (٤)

وبتوالي العمل على هذا المنوال يتحصل

و = (٣ − ١٧ وَ)/٧ = − ٢ وَ + (٣ − ٣ وَ)/٧ ∴

(٣ − ٣ وَ)/٧ = وً .... (٦) ∴ و = − ٢ وَ + وً .... (٧)

ثم يتحصل

وَ = (٣ − ٧ وً)/٣ = ١ − ٢ وً − وً/٣ ∴

وً/٣ = وٌ .... (٨) ∴ وَ = ١ − ٢ وً − وٌ .... (٩)

ثم يحدث من معادلة (٩)

وً = ٢ وً ....

وحيث كان مكرر وً في معادلة (١٠) مساويًا للواحد يمكن أن يفرض لغير المعين

وً أي مقدار صحيح موجب أو سالب فيحدث لغير المعين وً مقدار صحيح بعده ثم

تتحصل مقادير و , وَ , س , ص الصحيحة بواسطة معادلات (٩)، (٧)، (٥)، (٣)

وعليه فقد حلت المعادلة المفروضة

وعوضًا عن أن يبحث بالتوالي عن مقادير غير المعينات وً , وَ , و بالنسبة لمقدار

وً ليتوصل بذلك إلى مقداري س , ص يعين مقدارا هذين المجهولين بدلالة غير

المعين الأخير وً بأن يوضع ٢ وً بدل وً في معادلة (٩) فيتحصل

وَ = ١ − ٧ وً فإذا وضع بدل وَ , وً مقدارها في المعادلة (٧) الآتي

و = −٢ + ١٧ وً

وإذا وضع بدل و , وَ مقدارها في المعادلة (٥) حدث

ص = ٢ − ٤٦ وً ومثل هذا يحصل

س = ٢ + ٦٥ وً

ومن هذين القانونين تستخرج مقادير س , ص بأن يوضع فيهما بدل غير المعين

وً أي مقدار صحيح موجب أو سالب

والطريقة التي سلكناها هنا يؤخذ منها أنه يكون للمعادلة المفروضة حلول صحيحة

... تحويلها أو بين معادلة نتوصل بها الى الجواب على كسر فيه أبسط ...

... ... سم مشترك الأعظم

وما ذكرنا من العمليات فالمعادلات المتوالية الناتجة من العمل فهي البواقي المتوالية الحادثة من هذه العملية وحيث كان أحد هذه البواقي مساويًا بالضرورة للواحد فيكون البحث المذكور ... ارتباط بالبحث عن الحلول الصحيحة للمعادلة الأخيرة التي فيها ... ذكر ... قبل الأخير مساويًا للواحد بمعنى أنه يكفي لتحصيل ... الغرض المذكور أن يفرض لغير المعين الاخير مقدار صحيح

... ما تقدم من حسابات قابل للاختصار

... لنا نعرض المعادلة $٢٤ س + ٦٥ ص = ٢٤٣$

فنستخرج منها $س = \frac{٢٤٣ - ٦٥ ص}{٢٤}$

ثم نوجد بدل العدد ٢ الذي هو الجزء الصحيح من خارج قسمة ٦٥ على ٢٤ وباقيها ١٧ الخارج الصحيح ٣ فيكون الباقي − ٧ وبناءً عليه يكون

$$س = ١٠ - ٣ ص + \frac{٣ + ٧ ص}{٢٤}$$

واذا فرضنا أن $\frac{٣ + ٧ ص}{٢٤} = و$ نحصل

$$ص = \frac{٢٤ و - ٣}{٧} = ٣ و + \frac{٣ و - ٣}{٧}$$

ولكي يكون مقدار ص صحيحًا يلزم أن يكون المقدار $\frac{٣ و - ٣}{٧}$ صحيحًا وحيث أنه يمكن وضع المقدار $\frac{٣ و - ٣}{٧}$ بالصورة $\frac{٣ (و - ١)}{٧}$ وأن العددين ٣، ٧ أوليان

معًا

٥٩ ومتى كان للكمية المعلومة ﻫ في المعادلة ح س + ء ص = ﻫ مع أحد مكررى المجهولين مضروب مشترك مكن مساوٍ وهلة تحويل هذه المعادلة الى اخرى ابسط منها لانه اذا فرض أن ح = ح َ م ، ﻫ = ﻫ َ م (بجعل حَ , ءَ دالين على عدد صحيح) آلت المعادلة المفروضة الى اخرى هى

ح َ س + ء ص / م = ﻫ َ

ولكى تكون حلول هذه المعادلة صحيحة يلزم أن يكون ء ص قابلاً للقسمة على م وحيث أن ء اولى مع م فيكون ص قابلاً للقسمة على م فاذا رمز لهذا الخارج بالرمز ع نحصل ص = م ع وبناءً عليه يكون

ح َ س + ء ع = ﻫ َ

ويمكن استعمال هذا الاختصار فى المعادلة ٢٤ س + ٦٥ ص = ٢٤٣ المتقدمة حيث أن كلا من مكرر المجهول س الذى هو ٢٤ والكمية المعلومة ٢٤٣ يقبل القسمة على ٣ وبناءً على ذلك اذا فرض أن ص = ٣ ع آلت المعادلة المتقدمة الى

٨ س + ٦٥ ع = ٨١ ومنها يحدث

س = (٨١ − ٦٥ ع) / ٨ = ١٠ − ٨ ع + (١ − ع) / ٨

وينتج من (١ − ع) / ٨ = و أن ع = ١ − ٨ و فاذا ابدل ع بمقداره فى المعادلة المذكورة وفى معادلة ص = ٣ ع نحصل

س = ٢ + ٦٥ و ، ص = ٣ − ٢٤ و

بند ١٣٦ القانونان الناتجان من حل المعادلة ٤٢س + ٦٥ ص = ٤٣٢ المذكوران (في بندى ١٣٠ و ١٣١) اللذان يختلفان في الصورة عن القانونين المستخرجين من المعادلة المذكورة المتقدمين (في بندى ١٣١ ,١٣٠) يكونان متكافئين لانه اذا اخذ القانونان

س = ٤٦١٧ − ٦٥ و و ص = − ١٧٠١ + ٤٢ و

المتقدمان (في بند ١٣١) وقسم العدد ٤٦١٧ على ٦٥ والعدد ١٧٠١ على ٤٢ نحصل

٤٦١٧ = ٧١ × ٦٥ + ٢ ، ١٧٠١ = ٧١ × ٤٢ − ٣ وعليه فيكون

س = ٢ + ٦٥ (٧١ − و) ، ص = ٣ − ٤٢ (٧١ − و)

واذا فرض أن ٧١ − و = وَ نحصل

س = ٢ + ٦٥ وَ ، ص = ٣ − ٤٢ وَ

بند ١٣٧ ومن المعلوم أننا لم نتكلم الى هنا الاعلى طريقة تعيين الحلول الصحيحة موجبة كانت أو سالبة ولنتصدى الآن لاختبار الحالة التي يراد فيها تعيين الحلول الصحيحة الموجبة فقط فنقول

أنه يمكن في المعادلة العمومية ء س + د ص = ه أن الحد ه يكون موجبا لانه ان كان سالبا أمكن تحويله الى موجب بتغيير علامات طرفي المعادلة المذكورة وحينئذ لا تخرج جميع الحالات المبينة بعلامات حد و د من المعادلات الاربع التي

مختلفة بمقادير صحيحة موجبة ولنلاحظ أن المتباينتين $\text{س} > - \frac{\text{ج}}{\text{ب}}$ ، و $\text{ص} > \frac{\text{ج}}{\text{ب}}$ لا تكونان متخالفتين لأنه لما كان $\text{ا س} + \text{ب ص} = \text{ج}$ وكانت كمية ج موجبة بالفرض كان $\text{ا س} + \text{ب ص} >$. ومن هنا يحدث

$$\text{ب ص} > - \text{ا س} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{ص}}{\text{ا}} > - \frac{\text{س}}{\text{ب}}$$

فإذا جعل ج رمزاً لعدد صحيح موجب أو سالب أصغر من $- \frac{\text{ج}}{\text{ب}}$ و ج رمزاً لعدد صحيح أكبر من $\frac{\text{ج}}{\text{ا}}$ كانت مقادير و المحصورة بين $- \frac{\text{ج}}{\text{ب}} ، \frac{\text{ج}}{\text{ا}}$ مبينة بالاعداد

$$\text{ج} + ١ ، \text{ج} + ٢ ، \text{ج} + ٣ ، \ldots\ldots$$

وحيث أن الفرق بين الكسرين $\frac{\text{ج}}{\text{ا}} ، - \frac{\text{ج}}{\text{ب}}$ هو $\frac{\text{ب ج} + \text{ا ج}}{\text{ا ب}}$ أي $\frac{\text{ج}}{\text{ا ب}}$ فيكون الفرق ج − ج مساوياً ك أو ك + ١ بجعل ك رمزاً للجزء الصحيح من خارج قسمة ج على ا ب وحينئذ يكون عدد الحلول الصحيحة للمعادلة المفروضة مساوياً ك أو ك + ١

فإذا فرضت الآن المعادلة $\text{ا س} - \text{ب ص} = \text{ج}$ نشاهد أنها لا تختلف عن المعادلة الأولى إلا بتغيير علامة المجهول ص وباعتبار هذا التغيير في المقدارين المتقدمين يحصل $\text{س} = \text{ج} + \text{ب و} \quad ، \quad \text{ص} = - \text{ج} + \text{ا و}$

ولكي يكون مقدارا س ، ص موجبين يلزم أن يكون و > − جَ/دَ ، و > جُ/حُ .

وحينئذ يوجد عدد غير منتهٍ من مقادير و ما عدا الآنها في تكون محققة للتباينين

المتقدمتين لانه يكفي لتحقق كلتا المتباينتين أن يكون و أكبر من أعظم الكميتين

− جَ/دَ ، جُ/حُ وبناء على ذلك تتحصل حلول صحيحة موجبة غير منتهية العدد

في الحلول الصحيح لعدة معادلات ذات درجة اولى محتوية

على مجاهيل عددها يزيد عن عدد المعادلات المذكورة

١٢٨ إذا فرضت المعادلتان العدديتان

حـ س + د ص + هـ ع = م .... (١)

حَ س + دَ ص + هَ ع = مَ .... (٢)

وحذف من بينهما أحد المجاهيل وليكن ع مثلاً فانه يتحصل

(حـ هَ − هـ حَ) س + (د هَ − هـ دَ) ص = م هَ − هـ مَ ...... (٣)

وحينئذ فقد أبدلت معادلتا (١) و (٢) بمعادلتي (١) و (٣) فان كان للمعادلة

(٣) حلول صحيحة استنتج منها مقدارا س ، ص بدالة غير معين وليكن و

وعليه فتؤول المسئلة الى تعيين المقادير الصحيحة لغير المعين و بحيث اذا وضع

مقدارا س ، ص في المعادلة (١) تحصل مقدار صحيح للمجهول ع لانه اذا وضع

في المعادلة

وحينئذٍ تكون المعادلة (١) متحققة بالمقادير

س = ع ، ص = لـ ، ع = ر

ويتبع من ذلك أنه متى كان مكررا هـ ، هَ اولبين معًا استخرج من معادلة (٢) مقدارا س ، ص بدالة غير المعين ، ثم يوضع هذان المقداران في معادلة (١) فتؤول الى معادلة يستخرج منها مقدار المجهول ع بدالة غير المعين .

٢٣٩ ولمزيد التوضيح والتمرين على ذلك نفرض المعادلات الثلاث الرقمية وهي

١٣ س + ٥ ص - ٤ ع + ٤ ط = ٥٥٩ ،

٨ س + ٢ ص + ٣ ع - ٥ ط = ١٥٩٥ ،

١١ س - ٣ ص + ٥ ع - ٧ ط = ١٥٧٤ ،

ثم يحذف المجهول ط من بين المعادلة الاولى وكلتا المعادلتين الاخريين فتحصل المعادلتان

٩٧ س + ٢٥ ص + ٤ ع = ١٩١٧٥ ،

١٢٥ س + ٢٣ ص + ٦ ع = ٢٦٥٤١ ،

ويحذف المجهول ع من بينهما بين المعادلتين يحصل

٣٩ س + ٢٤ ص = ٧٧٤٦

وحينئذ فقد آلت جملة المعادلات المفروضة الى المعادلات الثلاث

١٣ س + ٥ ص − ٥ ع + ٩ ط = ٢٥٥٩ ن

٩٧ س + ٥٣ ص + ٥ ع = ١٩١٧٥ ن

٣٩ س + ٢٤ ص = ٧٧٤٦

ثم يبحث عن القانونين اللذين تعلم بواسطتهما الحلول الصحيحة للمعادلة ذات

المجهولين ٣٩ س + ٢٤ ص = ٧٧٤٦ وحيث أن مكرر س يقبل

القسمة على المضروب ٣ الذي يقسم العدد ٧٧٤٦ وأن مكرر ص

يقبل القسمة على المضروب ٢ الذي يقسم العدد ٧٧٤٦ فيمكن

اختصار الحساب بفرض س = ٢ سَ , ص = ٣ صَ وحينئذ تؤول المعادلة

المفروضة الى

١٣ سَ + ١٧ صَ = ١٢٩١

واذا حلت هذه المعادلة بمقتضى ما تقدم فانه يتوصل الى

صَ = ١ + ١٣ و , سَ = ٩٨ − ١٧ و وعليه فيكون

ص = ٣ + ٣٩ و , س = ١٩٦ − ٣٤ و

واذا وضع في المعادلة ٩٧ س + ٣٥ ص + ٢ ع = ١٩١٧٥ بدلا

عن س , ص مقدارها المبينان بدالة غير المعين و نحصل

١٢٣١ و - ٢ ع = - ٤

ومن هذه المعادلة يستنتج مقدارا ع , و بدالة غير معين آخر وَ

وحينئذ نحصل و = ٢ وَ ع = ١٢٣١ وَ + ٢

ثم يوضع بدل و مقداره ٢ وَ في مقداري س , ص السابقين فيؤول الى

ص = ٣ + ٧٨ وَ , س = ١٩٦ - ٦٨ وَ

ثم توضع بدل س , ص , ع المعينة بدالة غير المعين وَ مقاديرها في المعادلة

١٣ س + ٥ ص - ٢ ع + ٤ ط = ٥٩ ٢ فنحصل

٧٣٩ و - ط = ومنها يحدث

ط = ٧٣٩ وَ

وحيث كان مقدار ط المعين بدالة وَ صحيحا فيكون الحساب منتهيا

وبالجملة فتتعين الحلول الصحيحة لجملة المعادلات المفروضة بواسطة القوانين

س = ١٩٦ - ٦٨ وَ , ص = ٣ + ٧٨ وَ

ع = ٢ + ١٢٣١ وَ , ط = ٧٣٩ وَ

...

$$ح س + ء ص = ع - هـ ع$$

ثم يفرض لمزيد الاختصار أن ع - هـ ع = م فيتحصل

$$ح س + ء ص = م$$

ثم يستخرج من هذه المعادلة مقدارا س ، ص بالنسبة لكل من م وغير المعين و فاذا ابدل م بالمقدار ع - هـ ع تحصل مقدارا س ، ص بالنسبة لكل من ع وغير المعين و

وتختصر هذه الكيفية متى وجد بين المكررات الثلاثة ح ، ء ، هـ اثنان غير أوليين معا مثلا اذا فرض أن ح = حَ ك ، ء = ءَ ك آلت المعادلة المفروضة الى

$$حَ س + ءَ ص = \frac{ع - هـ ع}{ك}$$

ولكي يكون مقدارا س ، ص صحيحين يلزم أن يكون ع - هـ ع قابلا للقسمة على ك فاذا رمز لخارج القسمة بالرمز و تحصل

$$\frac{ع - هـ ع}{ك} = و$$ ومنها يحدث

$$هـ ع + ك و = ع$$

وعليه فتؤول المعادلة المتقدمة الى

$س = ٥٧ - ٢٠ وَ - ٢ ل \quad , \quad ص = ٥ ل + ٤٠ وَ - ١١٤$

ويستفاد من ذلك أن الخواص التي بواسطتها نتعين الحلول الصحيحة للمعادلة المفروضة هي

$س = ٥٧ - ٢٠ وَ - ٢ ل \; , \; ص = ٥ ل + ٤٠ وَ - ١١٤ \; , \; ع = ٣ وَ$

التي يفرض فيها لكل من غير المعينين وَ, ل جميع ما يراد من الاعداد الصحيحة

ولكي يكون مقدار ع الصحيح موجبًا يلزم أن تفرض لغير المعين وَ مقادير موجبة ويلزم ايضًا لجعل مقداري س, ص موجبين أن يكون

$$ل < \frac{٥٧ - ٢٠ وَ}{٢} \quad , \quad ل > \frac{١١٤ - ٤٠ وَ}{٥}$$

ويؤخذ منها بين المتباينتين أن

$$\frac{٥٧ - ٢٠ وَ}{٢} > \frac{١١٤ - ٤٠ وَ}{٥}$$ ومنها يحدث

$$وَ < \frac{٥٧}{٢٠} \quad \text{أى} < ٢\frac{١٧}{٢٠}$$

وحينئذٍ لا يمكن أن يفرض لغير المعين وَ الا المقادير ٠, ١, ٢ فاذا كان

وَ = ٠ فيكون $ل < \frac{٥٧}{٢} \; , \; ل > \frac{١١٤}{٥}$ ولذا يمكن أن يفرض أن ل = ٢٣، أو ٢٤، أو ٢٥، أو ٢٦، أو ٢٧، أو ٢٨،

واذا كان وَ = ١ وجب أن يكون $ل < \frac{٣٧}{٢} \; , \; ل > \frac{٧٤}{٥}$ وحينئذٍ يكون ل = ١٥ أو ١٦ أو ١٧ أو ١٨

واذاكان

المسئلة الثانية

اذا كان المراد قسمة ٧٠ غرشًا الى قطع من النقود منها ما قيمته خمسة غروش ومنها ما قيمته عشرون غرشًا

يجاب عن ذلك فيقال اذا رمز للقطع التي قيمة احدها خمسة غروش بالرمز س وللتي قيمة احدها عشرون غرشًا بالرمز ص نتج من ذلك لهذه المسئلة ثلاثة حلول هي

(١) س = ١٠ ، ص = ١ (٢) س = ٦ ، ص = ٢ (٣) س = ٢ ، ص = ٣

المسئلة الثالثة

اذا كان المراد تقسيم ٧١ غرشًا الى قطع من النقود منها ما قيمته خمسة غروش ومنها ما قيمته عشرون غرشًا يقال لأنه لا يوجد لهذه المسئلة حل صحيح

المسئلة الرابعة

اذا كان المراد قسمة ٢٦ غرشًا الى قطع من النقود منها ما قيمته خمسة غروش ومنها ما قيمته غرشان

يقال في الجواب انه اذا رمز لعدد القطع الاولى بالرمز ص وللثانية بالرمز س نتج من ذلك حلانها

(١) س = ٢ ، ص = ٨ ‏ (٢) ص = ٤ ، س = ٣

المسئلة الخامسة

عدة من الرجال والنساء صرفوا خمسين فرنكًا فى دسكرة فخص كل رجل ٥٥ سنتيمًا وكل امرأة ٦٥ سنتيمًا والمراد معرفة عدد الرجال والنساء فلذلك يقال إذا جعل س رمزًا لعدد الرجال و ص رمزًا لعدد النساء كان لهذه المسئلة حلول اربعة هى

(١) س = ٢ ، ص = ٧٤ ‏ (٢) س = ١٥ ، ص = ٥٥ ‏ (٣) س = ٢٨ ، ص = ٣٦ ‏ (٤) س = ٤١ ، ص = ١٧

المسئلة السادسة

اذا كان المراد معرفة العدد الذى باقى قسمته على ٢٩ يساوى ١٦ وباقى قسمته على ٥٦ يساوى ٢٧

يقال فى الجواب عن ذلك انه يتوصل لحل هذه المسئلة بالقانون العمومى

ح = ١١٤٧ + ،١٨٤ و

الذى تعلم منه جميع الأعداد المحققة لمنطوق المسئلة وحينئذ يكون أصغر

الأعداد المطلوبة هي ١١٤٧

المسألة السابعة

رجل اشترى مائة ماشية من خيل وبغال وحمير بمبلغ مائة من الاكياس وكان ثمن الفرس الواحد يساوي ثلاثة اكياس ونصف كيس وثمن البغل الواحد يساوي كيسا وثلث كيس وثمن الحمار الواحد يساوي نصف كيس والمراد معرفة عدد كل من هذه الأجناس

فحل هذه المسألة يقال اذا رمز بالرمز س لعدد الخيول وبالرمز ص لعدد البغال وبالرمز ع لعدد الحمير كان لهذه المسألة ثلاثة حلول هي

(١) س = ٥	(٢) س = ١٠	(٣) س = ١٥
ص = ٤٢	ص = ٢٤	ص = ٦
ع = ٥٣	ع = ٦٦	ع = ٧٩

المسألة الثامنة

ما هي الاعداد الثلاثة المرموز لها بالرموز س وص وع التي اذا ضرب الاول منها في ٣ والثاني في ٥ والثالث في ٧ كان مجموعها مساويًا ٥٦٠ واذا ضرب الأول في ٩ والثاني في ٢٥ والثالث في ٤٩ كانت مجموع الحواصل الجزئية مساويًا ٢٩٢٠

لذلك يقال أن هذه المسألة يكون لها بعد اجراء العملية علاقتان هما

$$(1)\ \begin{cases}\text{س} = ١٥ \\ \text{ص} = ٨٢ \\ \text{ع} = ١٥\end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases}\text{س} = ٥٠ \\ \text{ص} = ٤٠ \\ \text{ع} = ٣٠\end{cases}$$

بند ١٤٧ وحيث كان الحل غير المعين للمعادلات التي تزيد درجتها عن الدرجة الأولى لا يندرج تحت ما ذكر فلم نقصد هنا الا للحالة التي تكون فيها المعادلة ذات الدرجة الثانية والمجهولين غير محتوية على الدرجة الثانية لأحد المجهولين ويمكن اعتبار البحث عن حلول هذه المعادلة كالبحث عن الحل غير المعين لمعادلة ذات درجة اولى بأن يقال

كل معادلة ذات درجة ثانية ومجهولين غير محتوية على القوة الثانية لأحدهما توضع هكذا

$$\text{م}\,\text{س}\,\text{ص} + \text{ح}\,\text{س}^2 + \text{ع}\,\text{س} + \text{ك}\,\text{ص} = \text{ر} \quad \ldots\ldots (1)$$

فاذا حلت هذه المعادلة بالنسبة للمجهول ص تحصل

$$\text{ص} = \frac{-\text{ح}\,\text{س}^2 - \text{ع}\,\text{س} + \text{ر}}{\text{م}\,\text{س} + \text{ك}} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

واذا أجريت عملية القسمة الكائنة في هذا المقدار فانه يحدث

$$\text{ص} = -\frac{\text{ح}}{\text{م}}\,\text{س} + \frac{\text{ح}\,\text{ك} - \text{م}\,\text{ع}}{\text{م}^2} + \frac{\text{م}^2\,\text{ر} + \text{م}\,\text{ع}\,\text{ك} - \text{ح}\,\text{ك}^2}{\text{م}^2(\text{م}\,\text{س} + \text{ك})}$$

ومن هنا يحدث

$$مَ ص = - م ح س + ح ك - م ح ح + \frac{ل}{م س + ك} \quad \ldots\ldots (٤)$$

وذلك بجعل ل كناية عن مَ ر + م ح كَ - ح كَ

ولكي يكون كلا مقداري س، ص عددًا صحيحًا يلزم أن يكون $\frac{ل}{م س + ك}$ عددًا صحيحًا ثم نحسب قواسم العدد ل ويجعل كل منها مساويًا للكمية م س + ك مسبوقًا بعلامة + ، - فإن تحصل من المعادلات الناتجة من ذلك مقادير صحيحة للمجهول س وُضِعَت هذه المقادير في المعادلة (٣) لاستخراج مقادير ص ولكي تكون هذه المقادير صحيحة يلزم أن يكون الطرف الثاني من المعادلة (٣) الذي يؤول الى كمية معلومة قابلًا للقسمة على مَ

ومن المعلوم أن عدد الحلول الصحيحة يكون دائمًا منتهيًا وقد لا يتيسر الحصول على واحد منها فاذا سلكنا هذه الطريقة في حل كل من المعادلات الثلاث

٢ س ص - ٣ س + ص = ١ و

٥ س ص = ٢ س + ٣ ص + ١٨ و

س ص + س = ٢ س + ٣ ص + ٢٩

... الجذور ص وفرضنا أن س = ح + ك و (بجعل و رمزاً لعدد صحيح)

فانه يحدث

ص = (م ح² + هـ ح − ر) / ك − (٢ م ح و + م ك و² + هـ و)

وحيث فرضنا أن م ح² + هـ ح − ر قابل للقسمة على ك فيكون

مقدار ص المطابق س = ح + ك و عدداً صحيحاً وهذه النتيجة

لا يطرأ عليها تغير على أي وجه كانت علامة و ويؤخذ من ذلك أنه

متى وجد للمعادلة المفروضة حلول صحيحة وكان مقدار س محصوراً

فيما بين الصفر و ك فلإيجاد جميع الحلول الصحيحة للمعادلة المفروضة

توضع فيما بدل س الاعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ .... ك − ١

وحينئذ فكل حل صحيح مطابق لأحد هذه الاعداد يتحصل منه حلول أخرى

غير متناهية

الباب الخامس

في نظريات الاعداد الاولية

والكسور غير القابلة للاختصار

وخواص قسمة الاعداد على بعض

قواسمها ونظريات في الجذور

وحيث أيضًا ان ... من المتساوية الثانية عددًا صحيحًا
كانت الكمية ـــ عددًا صحيحًا كذلك وهلم جرا وحيث أن ح ، ع
عددان اوليان معًا فيكون أحد البواقي ... مساويًا
للواحد وعليه فيكون $\frac{ى \times ١}{ع} = \frac{ى}{ع}$ عددًا صحيحًا
ومثل هذا يبرهن على الحالة التي يكون فيها ح > ى

نتائج

(الاولى) كل عدد أولي كالعدد ع يكون قاسمًا للحاصل ح ى هـ و
يقسم أحد مضاريبه لانه اذا كان العدد ع لا يقسم العدد ح كان
اوليًا معه وحينئذٍ يلزم انه يقسم ى هـ و وكذلك اذا كان العدد ع
لا يقسم العدد ى كان اوليًا معه وحينئذٍ يلزم انه يقسم هـ و واذا كان
لا يقسم العدد هـ فانه يلزم ان يكون قاسمًا للعدد و
(الثانية) كل عدد أولي يكون قاسمًا للعدد $ح^م$ يقسم العدد ح حيث أن
$ح^م = ح \times ح \times ح \times ح \times$ ....
(الثالثة) متى كان العدد م قابلًا للقسمة على كل من الاعداد ى ، ىَ ، ىً ...
الاولية معًا كان قابلًا للقسمة على حاصل ضربها وهو ى ىَ ىً ......

لانه لما كان العدد م قابلاً للقسمة على د كان م = د ك فرض ك

رمزاً لعدد صحيح ولما كان العدد دَ قاسماً للعدد م كان قاسماً للحاصل :

د ك وحيث أن دَ اولي مع د فيكون دَ قاسماً للعدد ك وحينئذ يكون

ك = دَ كَ بفرض كَ رمزاً لعدد صحيح وعليه فيكون م = د دَ كَ

ومن هنا يعلم أن العدد م يقبل القسمة على د دَ وعلى هذا المنوال يبرهن

على أن العدد م يكون قابلاً للقسمة على الحاصل د دَ دً ....

النظرية الثانية

١٤٢ لا يمكن تحليل أي عدد الى مضاريب اولية الا بكيفية واحدة

مثلاً اذا فرض العدد ع = ح د هـ و ..... (بجعل ح , د , هـ , و .....

رموز المضاريب اولية متساوية أو غير متساوية) فلا يتأتى تجزيته

بغير هذه الكيفية لانه اذا فرض أن ع = حَ دَ هَ وَ ..... (بجعل حَ , دَ , هَ , وَ .....

رموز المضاريب اولية اخرى) كان ح د هـ و ..... = حَ دَ هَ وَ .....

وحينئذ يكون الحاصل ح د هـ و ..... قابلاً للقسمة على حَ ... يكون

قابلاً للقسمة على أحد مضاريبه وحيث ... العدد ... مضاريب ... معاً

فيكون ... مساوياً ... حَ ... فانه ... ... مَ ... ... معرَّف

من المتساوية المذكورة نتج من [illegible]

يكون مساويًا لأحد مضاريب الحاصل [illegible] لتكوين مضاريب

الحاصلين متساوية بالتناظر

نتائج

الاولى اذا كان $ع = ح^{م} د^{ع} ه^{ك}$ وفرض أن ح ، د ، ه دالة على مضاريب اولية معًا والاس م ، ع ، ك دالة على اعداد صحيحة موجبة فمن البديهي أن جميع المضاريب التي يمكن تكوينها من اس المضاريب الاولية ح ، د ، ه تكون قاسمة للعدد ع وتكون قوى المضروب الاول مبتدئة من الصفر الى م والثاني من الصفر الى ع والثالث من الصفر الى ك وحينئذ لا يكون للعدد ع قواسم غير هذه الحواصل اذ لولا ذلك لأمكن تحليل هذا العدد الى جمل متنوعة من المضاريب الاولية ويؤخذ من ذلك أنه يمكن بالسهولة تحصيل قواسم العدد ع بحساب نتيجة حدود الحاصل

$$(1+ح+ح^{2}+....+ح^{م})(1+د+د^{2}+....+د^{ع})(1+ه+ه^{2}+....+ه^{ك})$$

التي تكون مختلفة عن بعضها لكونه لا يوجد منها اثنان يكونان مركبين من مضاريب واحدة أولية متحدة في الاس وبناءً على ذلك تكون عدة قواسم العدد

ع

[illegible]

[illegible]

النظرية الثالثة

الكسر لا يكون قابلا للاختصار متى كان حداه اوليين معًا

مثلًا اذا كان $\frac{ح}{د}$ كناية عن كسر حداه ح ، د اوليان معًا يقال أن هذا الكسر لا يقبل الاختصار لانه لو امكن اختصاره لكان مساويًا لكسر آخر كالكسر $\frac{ح'}{د'}$ حداه دون حديه فاذا فرض أن $\frac{ح}{د} = \frac{ح'}{د'}$ كان $\frac{ح د'}{د} = ح'$ وحينئذ يكون د قاسمًا للحاصل ح د' وحيث كان ح أوليًا مع د فيكون د' قابلا للقسمة على د وهذا محال لانه قد فرض أن د' أقل من د

النظرية الرابعة

يلزم لتساوي كسر بآخر غير قابل للاختصار أن يكون حدا الكسر الاول مساويين لحدي الكسر الثاني مضروبين في عدد صحيح واحد

لانه اذا فرض أن $\frac{ح}{د}$ كسر غير قابل للاختصار وكان $\frac{ح'}{د'} = \frac{ح}{د}$ نتج منه أن $ح = \frac{ح' د}{د'}$ وبمقتضى هذه المساواة يكون الحد د' الاولي مع ح' قاسمًا للحد د فاذا فرض أن د = م د' (بجعل م رمزًا لعدد صحيح)

ثانيًا

تقبل القسمة على ك مساويًا بالأقل لعدد المضاريب الداخلة في الخاص د

لأنه اذا فرض أن ك < د وجعل دَ رمزًا للجزء الصحيح من خارج قسمة د

على ك كانت مكررات ك المحصورة في الأعداد المبتدئة من الواحد الى

د مساوية ك، ٢ك، ٣ك ...... دَك

واذا فرض أيضًا أن ك < ع وجعل عَ رمزًا للجزء الصحيح من خارج قسمة

ع على ك كانت مكررات ك المحصورة في المتسلسلة المبتدئة من الواحد

الى ع مساوية ك، ٢ك، ٣ك ...... عَك

وبالجملة اذا جعل مَ رمزًا للخارج الصحيح من قسمة م على ك كانت

مكررات ك المحصورة بين الأعداد المبتدئة من الواحد الى م مساوية

ك، ٢ك، ٣ك ...... مَك وحيث فرض أن ع + د = م فيكون

م/ك = ع/ك + د/ك وحينئذ يكون

مَ = عَ + دَ أو مَ > عَ + دَ

وحينئذ فقد ثبت المطلوب

فاذا جعل الآن حَ دالًا على مضروب اولى ن ل على عدد مضاريب

د القابلة للقسمة على حَ ن لَ على عدد المضاريب المشتملة على

حَ

حَ بدرجة ثانية أو بدرجة أعلى منها ان ءً على عدد للمضاريب منتهية

على حَ بدرجة ثالثة أو بدرجة على منها وهكذا وفرض ب ، ءَ ، ءً = ،

فان الحاصل ء يكون قابلاً للقسمة على حَ ص ولا يكون قابلاً للقسمة على قوة

أعلى من حَ ص لكن حيث كان ح يحتوى بالأقل على مضاريب قابلة للقسمة

على حَ المأخوذ بكل قوة يوجد بها في الحاصل ء فيكون ح قابلاً للقسمة

على حَ ص ومشتملاً على جميع المضاريب الأولية للحاصل ء مرفوعة لـ

قوى مساوية بالاقل للقوى التى رفعت إليها هذه المضاريب في الحاصل ء

وحينئذ يكون ح قابلاً للقسمة على ء

وبمثل هذا يبرهن على أن الحاصل ١ × ٢ × ٣ × ... × م يكون قابلاً للقسمة

على ١ × ٢ × ٣ × ... × ج × ١ × ٢ × ٣ × ... × ع × ١ × ٢ × ٣ × ... × ك

بفرض أن م = ج + ع + ك + ...

فى خواص قسمة الاعداد على بعض قواسمها

١٤٢ خواص قسمة الأعداد على بعض قواسمها ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٩ ، ١١ الموضحة

في كتب الحساب تنحصر في قضية عمومية يمكن تطبيقها على جميع الجمل التعدادية

مثلاً اذا فرضنا أن ع كناية عن عدد صحيح مكتوب بالنسبة لجملة تعدادية

أساسها ل ثم توهمنا قسمة هذا العدد بالابتداء من اليمين الى الشمال الى عقود كل منها مشتمل على ارقام عددها م ماعدا العقد الأخير فانه قد يكون كاملاً وقد لا يكون كاملاً ثم رمزنا لهذه العقود بالرموز ح، ء، ه، و وفرضنا أنها منفصلة عن بعضها تحصل

$$\text{ع} = \text{ح} + \text{ء}\,\text{ل}^{\text{م}} + \text{ه}\,\text{ل}^{\text{٢م}} + \text{و}\,\text{ل}^{\text{٣م}}$$

ويمكن وضع هذا المقدار بهذه الصور الثلاث وهي

$$\text{ع} = \text{ل}^{\text{م}}(\text{ه}\,\text{ل}^{\text{م}} + \text{و}\,\text{ل}^{\text{٢م}} + \dots) + \text{ء} \quad \text{ن}$$

$$\text{ع} = [\text{ء}(\text{ل}^{\text{م}} - ١) + \text{ه}(\text{ل}^{\text{٢م}} - ١) + \text{و}(\text{ل}^{\text{٣م}} - ١)] + (\text{ح} + \text{ء} + \text{ه} + \text{و}) \quad \text{ن}$$

$$\text{ع} = [\text{ء}(\text{ل}^{\text{م}} + ١) + \text{ه}(\text{ل}^{\text{٢م}} - ١) + \text{و}(\text{ل}^{\text{٣م}} + ١) \dots] + (\text{ح} + \text{ه} + \dots) - (\text{ء} + \text{و} + \dots)$$

وحينئذٍ تكون الاجزاء الأول من مقادير ع المبينة بهذه الصور الثلاث قابلة للقسمة بالتناظر على $\text{ل}^{\text{م}}$ ، $\text{ل}^{\text{م}} - ١$ ، $\text{ل}^{\text{م}} + ١$ ومن هنا تؤخذ القواعد الآتية وهي

أنه يلزم اولاً في كل جملة تعدادية ان يكون باقي قسمة عدد على أي قاسم مكونٍ من الاساس المرفوع الى القوة الميمية عين الباقي المتحصل من قسمة العقد الاول (المتألف من أرقام عددها م مأخوذة من يمين العدد)

يتحصل لهذا الأساس قوة تكون قابلة للقسمة على ح وحينئذ يجب أن نطبق القاعدة الاولى على ذلك

واذا كان العدد ح اوليًا مع الأساس ل فانه يبرهن على أنه يوجد لهذا الأساس قوة اذا نقصت عن أصلها واحدًا كان الباقي قابلًا للقسمة على ح لانه اذا قسمت القوى المتوالية ل، ل٢، ل٣ ...... ل^(ح-١) للأساس ل على العدد ح يتحصل من ذلك بواقي عددها ح يكون كل واحد منها دون هذا العدد ولا يكون معدومًا لان ح أولي مع الأساس ل ويؤخذ من هذا انه لو تحصل من ذلك باقيان متساويان لتحصلت المتساويتان لⁿ = ح ك + ر ، لⁿ⁺ᵐ = ح ك′ + ر (بفرض أن م+ن يكون دالًا على عدد دون ح) اللتان يستنتج منهما أن لⁿ (لᵐ − ١) = ح (ك′ − ك) وعليه فيكون ح قاسمًا للحاصل لⁿ (لᵐ − ١) حيث أن ح اولي مع كل من ل ، لⁿ فيكون قاسمًا لᵐ − ١

واذا فرض أن ح عدد اولي وأن لᵐ كناية عن أصغر قوة للأساس ل بحيث اذا نقصت عن اصلها واحدًا كان الباقي قابلًا للقسمة على ح فان كان العدد م زوجيًا ومبينًا بالرمز ٢ن كان ح قاسمًا لⁿ + ١

لأنه لما كان $ل^{٢ن} - ١ = (ل^{ن} - ١)(ل^{ن} + ١)$ لزم أن يكون ح قاسماً للعدد $ل^{ن} - ١$ أو $ل^{ن} + ١$ وحينئذ لا يكون قاسماً $ل^{ن} - ١$ وانما يكون قاسماً $ل^{ن} + ١$

فاذا فرضنا مثلاً أن ح = ٣٧ وقسمت القوى المتوالية للعدد ١٠ على ٣٧ كانت القوة الثالثة للعدد ١٠ المذكور هي التي يحصل منها باقٍ مساوٍ +١ وينتج من ذلك ان قابلية أي عدد للقسمة على ٣٧ تتوقف على قابلية قسمة حاصل جمع العقود (التي كل منها مركب من ثلاثة ارقام) على ٣٧

واذا فرض ايضاً أن ح = ٧ كانت أصغر قوى العدد ١٠ التي تقسم على ٧ ليكون الباقي مساوياً +١ هي ١٠٠٠٠٠٠ وعليه فكل عدد يقبل القسمة على العدد ٧ يكون له ارتباط بقابلية حاصل جمع العقود (التي كل منها مؤلف من ستة ارقام) على العدد ٧ وحيث أن باقي قسمة العدد ١٠٠٠ على ٧ يساوي -١ فينتج من ذلك أن أي عدد يكون قابلاً للقسمة على ٧ متى كان الفاضل بين حاصل جمع العقود الفردية المرتبة (التي كل منها مؤلف من ثلاثة ارقام) وحاصل جمع العقود الزوجية المرتبة (التي كل منها مؤلف من ثلاثة ارقام) قابلاً للقسمة على ٧

آخذة في التناقص الى أن تقرب من الصفر.

ولذا يقال حيث أن $ح > ١$ فيؤخذ من ذلك مباشرة أن $ح^{٢} > ح^{٣} > ح^{٤}$

...... $ح^{م+١} > ح^{م}$ فاذا فرض أن $ء = \frac{١}{ح}$ كان ء أكبر من الواحد

وحينئذ يكون $ء = \frac{١}{ح}$ ومنها يحدث $ح^{م} = \frac{١}{ء^{م}}$ وعلى ذلك اذا

جعل ع رمز الكمية معلومة صغيرة ما امكن فلا يتحقق الارتباط

$ح^{م} < ع$ الا اذا كان $\frac{١}{ء^{م}} < ع$ أو $ء^{م} > \frac{١}{ع}$ وحينئذ يمكن

بمقتضى النظرية المتقدمة تحصيل مقدار للأس م يكون محققا لهذا

الشرط الأخير

النظرية السابعة

بند ١٥٢ الجذر الميمي لأي عدد يقرب من الواحد كلما ازدادت درجة الجذر [illegible]

ويمكن أخذ م كبيرا بحيث يكون هذا الجذر مختلفا عن الواحد بكمية معلومة [illegible]

يعتبر عدد اكبر من الواحد كالعدد ح ثم يفرض أن $ء'$ كناية عن الجذر

الميمي للعدد ح , $ء''$ كناية عن الجذر الذي درجته م+ن للعدد المذكور

فيكون العددان $ء'$, $ء''$ اكبر من الواحد ويكون $ح = ء'^{م} = ء''^{م+ن}$

وحينئذ يكون $ء'^{م} > ء''^{م}$ وبناء على ذلك يكون $ء' > ء''$

[illegible]

هي حاصل الضرب مركب من جملة مضاريب كل منها مساوٍ لهذه الكمية

وعليه فالقوة الميمية لكمية تساوي حاصل ضرب مركب من مضاريب

عددها م كل منها مساوٍ لهذه الكمية ويلزم بمقتضى قاعدة ضرب

الجذور لتكوين القوة الميمية لحد أن يرفع مكرره الى القوة الميمية وتضرب

أسس كل من حروفه فى م

وينتج مما تقدم أنه يلزم لايجاد الجذر الميمى لحد ان يؤخذ الجذر الميمى لمكرره

وتقسم اسس كل من حروفه على م مثلاً الجذر الثالث لحد ٦٤ $ح^{٦}$ $د^{٣}$

هو ٤ $ح^{٢}$ د والجذر الخامس لحد ٣٢ $ح^{٥}$ $د^{١٥}$ $هـ^{١٠}$ هو ٢ ح $د^{٣}$ $هـ^{٢}$ وحينئذ

يلزم لاستخراج الجذر الميمى لحد أن يكون مكرره الرقمى قوة صحيحة درجتها م

وأن تكون اسس كل من حروفه قابلة للقسمة على م فان كان أحد هذين

الشرطين غير محقق كان الجذر الميمى للحد غير منطق ويستدل عليه بوضعه تحت

علامة $\sqrt[م]{\ }$ ويطلق على العدد م المكتوب بين شعبتى هذه العلامة

اسم دليل الجـــذر وبمقتضى قاعدة ضرب الكسور يلزم لايجاد القوة

الميمية لكسر ان يرفع كل من حديه الى القوة م وعليه فيستخرج الجذر

الميمى لكسر بأخذ الجذر الميمى لكل من حديه

حيث انه برهن بمثل ما تقدم في ضرب الجذور حتى قسمتها فيكون

$$\frac{\sqrt[م]{ح}}{\sqrt[م]{ء}} = \sqrt[م]{\frac{ح}{ء}} .$$

وينتج مما تقدم في الضرب والقسمة أنه يمكن ادخال مضروب تحت علامة الجذر بضرب اسه في دليل الجذر واخراجه من تحتها بقسمة اسه على دليل الجذر مثلاً

$$\sqrt[م]{ح^{م} ء} = ح \sqrt[م]{ء} ،$$

$$ح \sqrt[م]{ء} = \sqrt[م]{ح^{م} ء} ،$$

$$\sqrt[م]{\frac{ح^{م} هـ}{ء}} = ح \sqrt[م]{\frac{هـ}{ء}} ،$$

$$ح \sqrt[م]{\frac{هـ}{ء}} = \sqrt[م]{\frac{ح^{م} هـ}{ء}}$$

وبمثل ذلك يحصل

$$\sqrt[م]{ح^{م ن} ء^{ن}} = \sqrt[م]{ح^{م ن}} \times \sqrt[م]{ء^{ن}} = ح^{ن} \sqrt[م]{ء^{ن}} ،$$

$$\sqrt[م]{\frac{ء^{ن}}{ح^{م ن}}} = \frac{\sqrt[م]{ء^{ن}}}{\sqrt[م]{ح^{م ن}}} = \frac{\sqrt[م]{ء^{ن}}}{ح^{ن}}$$

وهذا هو المعروف بقاعدة اخراج المضروب من تحت علامة الجذر

$$\sqrt[3]{ح^{2} د} \times \sqrt[4]{ح\, د^{3}} \times \sqrt[6]{ح^{5} د^{3}} = \sqrt[12]{ح^{8} د^{4}} \times \sqrt[12]{ح^{2} د^{9}} \times \sqrt[12]{ح^{10} د^{6}} = \sqrt[12]{ح^{20} د^{19}} = \sqrt[12]{ح^{8} د^{7}}$$

$$= ح د \sqrt[12]{ح^{8} د^{7}}$$

وبمثل هذا يتحصل

$$\frac{\sqrt[5]{ح^{3} د^{2}}}{\sqrt[7]{ح^{4} د^{3}}} = \frac{\sqrt[35]{ح^{21} د^{14}}}{\sqrt[35]{ح^{20} د^{15}}} = \sqrt[35]{\frac{ح^{21} د^{14}}{ح^{20} د^{15}}} = \sqrt[35]{\frac{ح}{د}}$$

بند ١٦٠ يلزم لرفع جذر غير منطق الى أى قوة أن نرفع الكمية التى تحت علامته الى درجة هذه القوة مثلاً اذا اريد رفع $\sqrt[م]{ح}$ الى القوة التى دليلها ن شوهد أنه يتحصل $(\sqrt[م]{ح})^{ن} = \sqrt[م]{ح^{ن}}$ لان

$$(\sqrt[م]{ح})^{ن} = \sqrt[م]{ح} \times \sqrt[م]{ح} \times \dots = \sqrt[م]{ح \times ح \times ح \times \dots} = \sqrt[م]{ح^{ن}}$$

ومتى كان دليل الجذر قابلاً للقسمة على درجة القوة التى يُراد رفع ما تحت العلامة اليها اجرى العمل بهذه المثابة وهى أن يقسم العدد الأول على الثانى فيحدث

$$(\sqrt[م ن]{ح})^{ن} = \sqrt[م ن]{ح^{ن}} = \sqrt[م]{ح}$$

بند ١٦١ الجذر الميمى لكمية غير منطقة يتحصل بضرب دليلها فى درجة الجذر الميمى

التى

على م فان كانت القسمة ممكنة وجعل ع رمز الخارج القسمة كان الجذر النونالكية $\text{ح}^{\text{ع}}$ مبيناً هكذا $\text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$ وان كانت القسمة غير ممكنة أمكن ان يكون الجذر غير المنطق $\sqrt[\text{ن}]{\text{ح}^{\text{م}}}$ مبيناً هكذا $\text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$

بند ١٦٢ القواعد التي يلزم تطبيقها على الأسس الكسرية تؤخذ من القواعد المقررة في شأن الجذور غير المنطقة مثلاً اذا اعتبرت الآن احوال الضرب والقسمة وتكوين القوى واستخراج الجذور شوهد أن

$$\text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} \times \text{ح}^{\frac{\text{ع}}{\text{ك}}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{ح}^{\text{م}}} \times \sqrt[\text{ك}]{\text{ح}^{\text{ع}}} = \sqrt[\text{ن}\text{ك}]{\text{ح}^{\text{م}\text{ك}}} \times \sqrt[\text{ن}\text{ك}]{\text{ح}^{\text{ع}\text{ن}}} = \sqrt[\text{ن}\text{ك}]{\text{ح}^{\text{م}\text{ك}+\text{ع}\text{ن}}}$$

$$= \text{ح}^{\frac{\text{م}\text{ك}+\text{ع}\text{ن}}{\text{ن}\text{ك}}} = \text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}+\frac{\text{ع}}{\text{ك}}} \quad \text{و}$$

$$\text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} : \text{ح}^{\frac{\text{ع}}{\text{ك}}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{ح}^{\text{م}}} : \sqrt[\text{ك}]{\text{ح}^{\text{ع}}} = \sqrt[\text{ن}\text{ك}]{\text{ح}^{\text{م}\text{ك}}} : \sqrt[\text{ن}\text{ك}]{\text{ح}^{\text{ع}\text{ن}}} = \sqrt[\text{ن}\text{ك}]{\text{ح}^{\text{م}\text{ك}-\text{ع}\text{ن}}}$$

$$= \text{ح}^{\frac{\text{م}\text{ك}-\text{ع}\text{ن}}{\text{ن}\text{ك}}} = \text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}-\frac{\text{ع}}{\text{ك}}} \quad \text{و}$$

$$\left(\text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ع}} = \left(\sqrt[\text{ن}]{\text{ح}^{\text{م}}}\right)^{\text{ع}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{ح}^{\text{م}\text{ع}}} = \text{ح}^{\frac{\text{م}\text{ع}}{\text{ن}}} \quad \text{و}$$

$$\sqrt[\text{ع}]{\text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}} = \sqrt[\text{ع}]{\sqrt[\text{ن}]{\text{ح}^{\text{م}}}} = \sqrt[\text{ن}\text{ع}]{\text{ح}^{\text{م}}} = \text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}\text{ع}}} \quad \text{و}$$

$$\left(\text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}\right)^{\frac{\text{ع}}{\text{ك}}} = \sqrt[\text{ك}]{\left(\sqrt[\text{ن}]{\text{ح}^{\text{م}}}\right)^{\text{ع}}} = \sqrt[\text{ك}]{\sqrt[\text{ن}]{\text{ح}^{\text{م}\text{ع}}}} = \sqrt[\text{ن}\text{ك}]{\text{ح}^{\text{م}\text{ع}}} = \text{ح}^{\frac{\text{م}\text{ع}}{\text{ن}\text{ك}}}$$

وحينئذ يؤخذ من هذه النتائج المختلفة ان القواعد المنسوبة للأسس الكسرية لا تختلف عن القواعد المتعلقة بالأسس الصحيحة

بند ١٦٤ قد تقدم في الاسس السالبة انه متى كان للاس م سالباً أمكن أخذ المقدار $\frac{1}{ح^م}$ بدل $ح^{-م}$ وذلك لا يختلف في الأسس الكسرية بمعنى

أن $ح^{-\frac{م}{ن}} = \frac{1}{ح^{\frac{م}{ن}}}$ لان

$$ح^{-\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{ح^{-م}} = \sqrt[ن]{\frac{1}{ح^م}} = \frac{1}{\sqrt[ن]{ح^م}} = \frac{1}{ح^{\frac{م}{ن}}}$$

في المتواليات الأسية

بند ١٦٤ خواص الأسس توصل الى نظرية ضرورية لحل جملة مسائل وكثيرة الاستعمال في الحسابات العددية

وحينئذ يستلزم ان يبرهن على أن جميع الاعداد تنتج من قوى عدد ثابت موجب اكبر من الواحد فاذا رمز بالرمز ح لعدد ثابت موجب اكبر من الواحد وكونت القوى المتوالية ح , ح٢ , ح٣ , ح٤ ..

حدث من تلك الجملة اعداد تكون آخذة في الازدياد وغير محدودة

فاذ فرض كسر حينما اتفق كالكسر $\frac{م}{ح}$ الذي يكون حداه م، ح دالين على عددين صحيحين موجبين كان المقدار $ح^{\frac{م}{ح}}$ اكبر من الواحد لانه يكافئ $\sqrt[ح]{ح^{م}}$ وحيث أن العدد ح اكبر من الواحد فيكون $ح^{م}$ اكبر من الواحد وعليه فيكون المقدار $\sqrt[ح]{ح^{م}}$ دالا على عدد اكبر من الواحد ويكون ايضا المقدار $ح^{\frac{م}{ح}}$ آخذا في الكبر كلما كبر الأس لانه اذا رمز بالرمزين ك، ك' لأسين موجبين حينما اتفق حدث $ح^{ك+ك'} = ح^{ك} \times ح^{ك'}$ وحيث أن $ح^{ك'}$ أكبر من الواحد يكون حاصل الضرب $ح^{ك} \times ح^{ك'}$ اكبر من $ح^{ك}$

واذا فرض الآن أن $ك' = \frac{١}{م}$ (بفرض م عددا صحيحا) كان:

$ح^{ك+ك'} - ح^{ك} = ح^{ك}(ح^{\frac{١}{م}} - ١) = ح^{ك}(\sqrt[م]{ح} - ١)$ وحيث شوهد أنه يمكن أن يفرض للعدد م مقدار كاف بحيث يكون $\sqrt[م]{ح}$ مختلفا عن الواحد بقدر ما يراد (كما في سند ١٥١) فيمكن أن يفرض للعدد م مقدار صغير بحيث يكون للفرق $ح^{ك+ك'} - ح^{ك}$ صغيرا بقدر ما يراد

ومن هنا يؤخذ انه اذا رمز بالرمزين س، ص لكميتين متغيرتين ووضعت المعادلة $ص = ح^{س}$ وفرض للمتغير س جملة مقادير متقاربة بعضها من بعض بالابتداء من الصفر الى $+\infty$ كان للمتغير ص جملة مقادير متقاربة بعضها من بعض بحيث اذا زاد س

بكيفية

بكيفية متوالية بالابتداء من الصفر الى $+\infty$ اخذ ص جميع المقادير من الواحد الى $+\infty$

واذا فرض للمتغير س مقادير سالبة بأن كان س = − ى آلت المعادلة الى المتقدم

$$ص = د^{-ى} = \frac{1}{د^{ى}}$$

فاذا فرض أن ى يأخذ مقادير من ابتدا الصفر الى $+\infty$ فان $د^{ى}$ يأخذ مقادير من ابتدا الواحد الى $+\infty$ وحينئذ يكون للمتغير $\frac{1}{د^{ى}}$ مقادير من ابتدا الواحد الى $\frac{1}{\infty}$ او الى الصفر

ولنفرض الآن أن د يكون دالا على عدد دون الواحد مبين بالكسر $\frac{1}{ء}$ (بفرض ء عددًا اكبر من الواحد) فتؤول المعادلة

$$ص = د^{س} \text{ الى } ص = \left(\frac{1}{ء}\right)^{س} = \frac{1}{ء^{س}}$$

واذا اخذ س جميع المقادير من ابتدا الواحد الى $+\infty$ اخذ $ء^{س}$ جميع الأعداد من الواحد الى $+\infty$ وعليه فتكون جميع مقادير ص محصورة بين الواحد والصفر واذا فرض للمتغير س مقادير من ابتدا الصفر الى $-\infty$ أخذ $ء^{س}$ جميع المقادير المحصورة بين الواحد والصفر وعليه يكون للمتغير ص جميع الاعداد من ابتدا الواحد الى ∞

وينتج مما سبق انه اذا كونت جميع القوى لعدد موجب اكبر من الواحد او اصغر منه
امكن استنتاج جميع الاعداد

بند ١٦٥ اذا فرضت المعادلة ص = $ح^{س}$ أى ص معلوم ورمز له بالرمز د كان

$ح^{س} = د$

ولاستخراج مقدار س من هذه المعادلة يفرض في ابتداء الامر أن ح > ١ , د > ١
وحينئذ اذا وضعت بدل س الاعداد الصحيحة ٠، ١، ٢، ٣، ٤ ......
يتوصل بذلك الى مقدارين كالعددين م , م+١ (وربما كان
م صفرا) بحيث يكون $ح^{م}$ < د , $ح^{م+١}$ > د كان مقدار س محصورا

بين م , م+١

واذا فرضت س = م + $\frac{١}{ص}$ (بجعل ص اكبر من الواحد) آلت المعادلة
المفروضة الى $ح^{م+\frac{١}{ص}}$ = د أى $ح^{م} \times ح^{\frac{١}{ص}} = د$ ومنها يحدث

$$ح^{\frac{١}{ص}} = \frac{د}{ح^{م}} \quad أو \quad ح = \left(\frac{د}{ح^{م}}\right)^{ص}$$

وحيث أن خارج قسمة د على $ح^{م}$ محصور بين ١ , ح فيمكن تعيين
المقدار الصحيح المقرب من ص بأن يستعوض عن ص بالاعداد ١، ٢، ٣، ...
وبتوالي العمل على هذا المنوال يتحصل للمتغير س مقدار بين كسر متصل

مثلا

وبناء عليه يكون

$$س = ٣ + \cfrac{١}{٣ + \cfrac{١}{٩ + الخ}}$$

فاذا حسبت الآتية الرابعة لهذا الكسر المتسلسل تحصل $\frac{٢٨}{٩٣}$ وهو المقدار المقرب للمجهول س وهذا المقدار يزيد عن المقدار الحقيقي غير أن الخطأ يكون فيه اقل من $\frac{١}{١٠٣ \times ٩٣}$ أي من $\frac{١}{٩٥٧٩}$

واذا فرض الآن في المعادلة $ح^{س} = ء$ أن $ح > ١$ و $ء < ١$ كان مقدار س سالبًا فاذا جعل $س = -ص$ آلت المعادلة المتقدمة الى

$ح^{-ص} = ء$ أو $\frac{١}{ح^{ص}} = ء$ ومنها يحدث

$$ح^{ص} = \frac{١}{ء}$$

وحيث أن ء اقل من الواحد فيكون $\frac{١}{ء}$ اكبر من الواحد وعليه فقد آل الأمر الى الحالة السابقة

وإذا فرض أن $ح < ١$ ، $ء > ١$ كان مقدار س سالبًا أيضًا فاذا جعل $س = -ص$ كان $ح^{-ص} = ء$ أي $\frac{١}{ح^{ص}} = ء$ ومنها يحدث

$$\left(\frac{١}{ح}\right)^{ص} = ء$$

وحيث ان

حيث كان حمٓ عدداً صحيحاً وبما عدا ايضاً انه ينبغي ان يكون ح , ء مركبين

من مضاريب اولية واحدة لان كل مضروب اولي قاسم للعدد ح يقسم حمٓ

وبسببه يكون قاسماً للعدد ءنٓ او ء وبمثل هذا يبرهن على ان كل مضروب

اولي للعدد ء يقسم العدد ح

فاذا فرض ان $\text{ح} = \text{ح}^{\text{ع}}\,\text{ء}^{\text{ك}}$, $\text{ء} = \text{ح}^{\text{ط}}\,\text{ء}^{\text{ى}}$ (بجعل ح , ء كناية عن المضاريب

الاولية للعددين ح , ء) آلت المتساوية $\text{ح}^{\text{م}} = \text{ء}^{\text{ن}}$ الى

$$\text{ح}^{\text{م ع}} \times \text{ء}^{\text{م ك}} = \text{ح}^{\text{ن ط}} \times \text{ء}^{\text{ن ى}}$$

ولكي تكون هذه المتساوية حقيقية يلزم ان يكون $\text{م ع} = \text{ن ط}$, $\text{م ك} = \text{ن ى}$

وهاتان المتساويتان يحدث منهما

$$\frac{\text{ن}}{\text{م}} = \frac{\text{ع}}{\text{ط}} = \frac{\text{ك}}{\text{ى}}$$

وعليه فلكي يكون مقدار س منطقاً يلزم ان يكون ء عدداً صحيحاً وان تكون

المضاريب الاولية للعدد ء عين المضاريب الاولية للعدد ح وان تكون

اسس مضاريب العدد ء متناسبة لاسس مضاريب العدد ح

وتكون الشروط المذكورة كافية لتحقيق ما ذكر لانه اذا فرض ان $\text{ح} = \text{ح}^{\text{ع}} \times \text{ء}^{\text{ك}}$

$\text{ء} = \text{ح}^{\text{ط}} \times \text{ء}^{\text{ى}}$, $\frac{\text{ط}}{\text{ع}} = \frac{\text{ى}}{\text{ك}}$ تحصل

اولاً أن لوغارتم حاصل ضرب يكون مساوياً لمجموع لوغارتمات مضاريبه

وثانياً أن لوغارتم خارج قسمة عددين يكون مساوياً للوغارتم المقسوم مطروحاً

منه لوغارتم المقسوم عليه

وثالثاً ان لوغارتم أي قوة لاي عدد يكون مساوياً للوغارتم هذا العدد

مضروباً في درجة القوة المذكورة

ورابعاً أن لوغارتم جذر أي عدد يكون مساوياً للوغارتم هذا العدد

مقسوماً على درجة الجذر المذكور

ويؤخذ من القاعدة الثانية ان لوغارتم أي كسر يكون مساوياً للوغارتم

بسطه مطروحاً منه لوغارتم مقامه وينتج من القاعدتين الاوليين أن

لوغارتم الحد الرابع من متناسبة يكون مساوياً لمجموع لوغارتمي الوسطين

مطروحاً منه لوغارتم الحد الأول

١٦٧ متى تكونت جملة لوغارتمية سهل الانتقال منها الى جملة اخرى لانه اذا

[illegible] بالرمز ح لاساس الجملة الاولى وبالرمز ى لاساس الجملة الثانية

[illegible] لوغارتم أي عدد كا عدد م بالنسبة للجملة التي اساسها ى [illegible]

[illegible]

أن ص = $\frac{لوه}{لوح}$ فاذا وضع مقدار ص فى المعادلة ءᵒ = ص حدث

$$س = \frac{لو(لوه) - لو(لوح)}{لوء}$$

واذا اريد حل المعادلة $ح^{س+٢} - \frac{ء}{ح^{س-١}} = ه$

يفرض أن $ح^{س} = ع$ فيكون $ح^{٢} \times ع - \frac{ح ء}{ع} = ه$ أى $ح^{٢} ع^{٢} - ه ع = ح ء$

وهذه المعادلة الأخيرة يعلم منها مقدار المجهول ع فاذا كان لهذا المجهول

مقدار موجب تحصل مقدار س المطابق له بوضع هذا المقدار الموجب

بدل ع فى المعادلة $ح^{س} = ع$

مبد ١٧١ قد ذكر فى علم الحساب أن نظرية اللوغارتمات ناتجة من نظرية المتواليات

ولنوضح ذلك فنقول

اذا فرضت متوالية هندسية حدها الأول ١ وأساسها كمية تختلف عن

الواحد بقليل وحدودها تأخذ فى الازدياد بمقادير صغيرة جدا بحيث تكاد تدرك لذلك

بشرط أن تكون هذه المتوالية محتوية على جميع الاعداد وفرضت أيضا

متوالية عددية حدها الأول صفر وأساسها كمية صغيرة جدا بما عبارة عن

أن هاتين المتواليتين تكونتا على وجه بحيث تكون حدود المتوالية

الثانية موضوعة تحت حدود المتوالية الاولى ويكون صفر المتوالية العددية

محاذيا

محاذياً للحد ١ من المتوالية الهندسية ينتج من كل حد من حدود متوالية عددية

اسم لوغارتم الحد المحاذي له من متوالية هندسية :

واللوغارتمات المكونة بهذه المثابة هي أسس القوى التي يرفع إليها عدد ثابت

فتتكون من ذلك الأعداد التي تكون لها هذه اللوغارتمات لأنه إذا رمز

بالرمز ك لكمية ثابتة يمكن اعتبارها مقربة من الواحد بكمية صغيرة جداً

وفرضت المتواليتان

∺ $\frac{١}{ك^{٣}}$: $\frac{١}{ك^{٢}}$: $\frac{١}{ك}$: ١ : ك : ك^{٢} : ك^{٣} ..... ∺

÷ ٣د . ٢د . د . صفر . −د . −٢د . −٣د ..... ÷

فنجعل م د = ١ و ك^{م} = ح فيحدث

ك = ح$^{\frac{١}{م}}$ = ح^{د}

وحينئذ تكتب المتوالية الهندسية هكذا

∺ ح$^{-٣د}$: ح$^{-٢د}$: ح$^{-د}$: ١ : ح^{د} : ح^{٢د} : ح^{٣د} .....

ومنه ما يشاهد أن حدود هذه المتوالية هي مقادير متغير ص مستنتجة

من فرض المعادلة ص = ح^{س} ومن مقادير متغير س فإنها تعين

بواسطة الحدود المختلفة من المتوالية العددية

فى اللوغارتمات التى اساسها ١٠
واستعمال الجداول اللوغارتمية

يد ... لوغارتمات الاعداد ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ هى على الترتيب ١ ، ٢ ، ٣ ، ......

وأما لوغارتمات الأعداد التى ليست من القوى الصحيحة للعدد ١٠ فلا يمكن بيانها الا بوجه التقريب (كما فى ف ١٦٦) وهذه اللوغارتمات التقريبية تتعين بـ ... اعشارى وأما الجزء الصحيح للوغارتم عدد اكبر من الواحد فانه يحتوى ... عدة من الآحاد مساوية لعدد ارقام هذا الجزء ناقصة واحداً لانه اذا رمز لعدد ارقام الجزء الصحيح بالرمز م كان محصوراً بين $10^{م-1}$ و $10^{م}$ وبناءً على ذلك يكون لوغارتمه محصوراً بين م-١ و م وحينئذ يكون مركباً من احاد عددها م-١ ومن جزء اعشارى أقل من الواحد ولذا اطلق على الجزء الصحيح من كل لوغارتم اسم العدد البيانى

... حيث أن الجداول اللوغارتمية لا تحتوى الا على لوغارتمات الاعداد الصحيحة ١٧٥ فيلزم لايجاد لوغارتم كسر ان تطبق عليه القاعدة المتقدمة (فى ف ١٦٨)

ومتى كان الكسر المفروض اقل من الواحد امكن تعيين لوغارتمه السالب على وجه بحيث يكون جزؤه الاعشارى موجباً ولذا يلزم ان يضاف بالاختيار

ويضاف الى عدده البياني واحد لان

٢̄،٢٣٤٦٨٩٩ = -٢-٠،٢٣٤٦٨٩٩ = -٣+(١-٠،٢٣٤٦٨٩٩)

= ٣̄،٧٦٥٣١٠١

واذا اريد ضرب اللوغارتم ٣̄،٧٦٥٣١٠١ فى عدد صحيح كالعدد ٤ مثلاً فان حاصل الضرب يكتب هكذا

٣̄،٧٦٥٣١٠١×٤ = -٣×٤+٠،٧٦٥٣١٠١×٤ أو ٩̄،٠٦١٢٤٠٤

ومتى كان لوغاريتم مكونًا من عدد بياني سالب وجزء اعشاري موجب واريد قسمته على عدد صحيح لزم أن يؤخذ خارج قسمة العدد البياني على وجه بحيث يكون الباقي موجبًا مثلًا اذا قسم ٧̄،٣٢٩٥٦٤٢ على ٣ كان خارج قسمة -٧ على ٣ هو -٢ والباقي -١ أو خارج القسمة -٣ والباقي +٢ ويتوالى العمل هكذا يحدث ٣̄،٧٧٦٥٢١٤ وهو الناتج المطلوب

١٣٦ يؤخذ من القواعد المتقدمة (فى ١٢٨) أن

لو (ح × ١٠^م) = لوح + لو ١٠^م = لوح + م و

لو (ح / ١٠^م) = لوح − لو ١٠^م = لوح − م

ومن هنا ينتج أن لوغارتم حاصل ضرب عدد فى القوة الصحيحة للعدد ١٠ اذا

خارج قسمته عليه يكون مساويًا للوغارتم هذا العدد مضافًا إليه ومطروحًا منه آحاد بقدر درجة القوة الصحيحة للعدد ١٠

ويؤخذ من ذلك أن لوغارتم العدد الاعشارى الذى يزيد عن الواحد ولوغارتم العدد الاعشارى الذى ينقص عن الواحد ويكون عدده الباقى سالبًا يتحد فى الجزء الاعشارى الذى هو لوغارتم العدد الصحيح المتكون بقطع النظر عن الشرطة

وحينئذ يسهل معرفة العدد الباقى للوغارتم عدد اعشارى أصغر من الواحد لأنه اذا رمز بالرمز ع لعدد الأصفار الواقعة بين الشرطة وأول رقم معنوى يوجد عن يمينها كان العدد المفروض أصغر من $\frac{1}{10^{ع}}$ وأكبر من $\frac{1}{10^{ع+1}}$ وحينئذ يكون لوغارتم هذا العدد محصورًا بين $-ع$ و $-(ع+1)$ أعنى أن هذا اللوغارتم يكون مساويًا $-(ع+1)$ مضافًا إليه جزء اعشارى موجب أو أنه يكون مساويًا $-ع$ مضافًا إليه جزء اعشارى سالب

نهاية

[illegible] عدد اعشارى [illegible]

كان عدده الباقى مساويًا للعدد [illegible]

شريطة فى العدد المفروض

وثانياً متى كان اللوغارتم سالباً بالكلية كان عدد الباقى أقل بواحد من العدد

الدال على رتبة أول رقم معنوى يوجد عن يمين الشرطة فى العدد المفروض

وعلى ذلك يكون العدد الباقى الموجب أو السالب للوغارتم دال على رتبة

أعظم آحاد العدد الذى ينسب اليه هذا اللوغارتم

بند ١٧٠ تطبيق اللوغارتمات على العمليات العددية بواسطة الجداول يتوقف على حل

مسئلتين

(الأولى) المعلوم عدد والمراد ايجاد لوغارتمه

(والثانية) المعلوم لوغارتم عدد والمراد ايجاد هذا العدد

تنبيه يكفى لحل المسئلة الأولى ان نذكر الجداول المستعملة فى ذلك فنقول

جداول لالند وجداول رينو ومارى تحتوى على لوغارتمات الاعداد

الصحيحة من ابتداء الواحد الى ١٠٠٠٠ وأما جداول كاليه فانها تحتوى على

لوغارتمات هذه الأعداد من ابتداء الواحد الى ١٠٨٠٠٠ غير أنه لا يوجد بها

عدد بيانى لكونه يسهل ايجاده (بمقتضى بند ١٧٤) من اول وهلة

فاذا كان

فاذا كان لوغارتم العدد الصحيح يزيد عن اكبر الاعداد التي توجد بجدوله فانه
يلزم أن ينقص عن يمين هذا العدد بالشرطة عدة من الارقام بحيث يكون
الباقي اكبر عدد يوجد بين ما في الجدول وحينئذ يكون هذا العدد
كناية عن عشاري صحيح اذا رمز لجزئه الصحيح بالرمز ح وجزئه الاعشاري
بالرمز ى والجزء الاعشاري من لوغارتم العدد ح بالرمز ن وبالرمز ق
للفرق الكائن بين لوغارتمي العددين ح ، ح + ١ المحسوب في جدوله او في غيره
حدثت المتناسبة

١ : ى :: ق : س

التي يؤخذ منها أن س = ى × ق
فينبغي أن يضم مقدار س الى ن ليتكون من ذلك جزء الاعشاري للوغارتم
العدد ح + ى الذي هو الجزء الاعشاري للوغارتم العدد الصحيح معلوم
وأما عدده البياني فيتعين بالكيفية المتقدمة
ومتى كان العدد المفروض عددا اعشاريا اكبر من الواحد او اصغر منه كان عدده
البياني معلوما دائما وحيث ان جزءه الاعشاري لا يتغير اذا قطع النظر عن شرطة
في ذلك العدد المفروض فيتعين لوغارتمه بالكيفية السابقة

فاذا كان العدد المعلوم مشتملاً على اعداد صحيحة وكسور وحولناه الى كسر واحد لوغارتمه
يتعين بالكيفية المتقدمة (في بند ١٦٨)

ويكون لحل المسئلة الثانية أنيقا لحيث أن العدد البياني للوغارتم يدل دائماً على
مرتبة أعظم احاد في العدد المطلوب (كما في بند ١٧٥) فلا يعتبر غير الجزء الأعشاري
من اللوغارتم وأما العدد البياني فيقطع النظر عنه ثم يبحث عن العدد المطابق
لهذا الجزء الاعشاري ويضرب في القوة الموافقة للعدد ١٠ أو يقسم عليها
فأما ان كان الجزء الاعشاري للوغارتم معلوم موجوداً في الجداول بالضبط
فان العدد المطابق له يعلم من اول وهلة

واما ان كان لا يوجد فيها بالضبط فانه يبحث عن الجزء المقرب منه بحيث
لا يزيد عنه فاذا رمز بالرمز ل للجزء المقرب منه وبالرمز ح للعدد الصحيح
المطابق له وبالرمز لَ للجزء الاعشاري من اللوغارتم وبالرمز ى للفرق
الكائن بين لوغارتمي ح , ح+١ وبالرمز ىَ للفرق لَ-ل تحصلت المتناسبة
ى : ىَ :: ١ : س التي يعلم منها أن س = ىَ/ى وهذا المقدار الاعشاري
يضاف الى العدد ح ليتكون عدد يكون الجزء الاعشاري للوغارتمه دالاً على
الجزء الاعشاري من اللوغارتم المعلوم

مثلا اذا اريد معرفة لوغارتم العدد ٢٧٧٩٦ يبحث في الصف م عن العدد ٢٧٧٩ وعلى استقامة الصف الافقي المحتوى على هذا العدد الى الصف المبين بالعدد ٦ نرى فيه الارقام الاخيرة للوغارتم المطلوب ولتعيين ارقامه الاولى يؤخذ العدد المنعزل الاكثر قربا منه بالصعود الى الصف المبين بالصفر فيحدث باعتبار العدد البياني

لو ٢٧٧٩٨ = ٤٫٤٤٤٠١٣٦

والفرق بين لوغارتمي عددين صحيحين متواليين يوجد في الصف الأخير (من جهة اليمين) المبين بالرمز (فرق) المكتوب في رأس الجدول الصغير الأكثر قربا من هذه الاعداد لكنه يلاحظ أن هذا الفرق يدل على آحاد من المرتبة الأخيرة وتؤخذ من الجدول النسبي الكائن تحت الصف المذكور حواصل ضرب هذا الفرق في ٠٫١ ، ٠٫٢ ، ٠٫٣ ، ٠٫٤ ، ٠٫٥ ، ٠٫٦ ، ٠٫٧ ، ٠٫٨ ، ٠٫٩

ومن هنا ينتج بالسهولة حاصل ضرب هذا الفرق في أي كسر اعشاري وحينئذ يمكن بواسطة هذا الجدول الاستغناء عن اجراء العمليات الناتجة من المناسبة المتقدمة

مثلا اذا اريد معرفة لوغارتم العدد ١٤٥١٨٤٦٩ لزم ان تفصل عنه بالشرطة

من جهة الشمال ارقامه الخمسة الاول فيؤول الى ١٤٥١٨,٤٦٩ وحينئذ يرى أن لوغاريتم الجزء ١٤٥١٨ هو ٠,١٦١٩٠٦٨ وجدول الفروق الاعظم قربا منه هو الجدول المحتوى على ٢٩٩ وفى هذا الجدول يرى أن الاعداد المطابقة للأعداد ٩,٦,٤ المعتبرة اعشارا هى ١٢٠ و٧٩ و٦٩, التى يؤخذ منها أن

٢٩٩ × ٠,٤ = ١٢٠ و ٢٩٩ × ٠,٠٦ = ١٧,٩ و ٢٩٩ × ٠,٠٠٩ = ٢,٦٩

وحينئذ يتحصل اللوغاريتم المطلوب بهذه الكيفية وهى أن يضاف الى الاحاد الاخيرة من لوغاريتم العدد ١٤٥١٨ الاعداد ١٢٠ و ١٧,٩ و ٢,٦٩ وطريقة الحساب هى

لو ١٤٥١٨		٠,١٦١٩٠٦٨
المقدار المطابق مع	٠,٤	١٢٠
المقدار المطابق مع	٠,٠٦	١٧,٩
المقدار المطابق مع	٠,٠٠٩	٢,٦٩
		٠,١٦١٩٢٠٩

فاذا اريد الآن معرفة العدد المحصل من لوغاريتم معلوم وفرض أن الجزء الاعشارى لهذا اللوغاريتم هو ٠,١٦١٩٢٠٩ فانه يبحث فى لوغاريتمات اعداد الارقام

الأربعة الكائنة في الصف المبين بالصغر عن اللوغارتم الاعظم قربا من اللوغارتم المعلوم بدون أن يزيد عنه ويؤخذ العدد المطابق له وهو ١٤٥١ وبالسلوك على استقامة الصف الافقي المذكور يشاهد العدد الذي يقرب كل القرب من ٩٢٠٩ المتكون من الارقام الأربعة الأخيرة التي يتركب منها اللوغارتم وهذا العدد هو ٩٠٦٨ الذي يوجد في الصف المبين بالعدد ٨ وحينئذ يكون الفرق بين ٩٠٦٨ و ٩٢٠٩ هو ١٤١ ثم يبحث في جدول الفروق عن العدد الذي يقرب من ١٤١ ولا يزيد عنه فيرى أنه ١٢٠ وهو المطابق للعدد ٤ر٠ وحيث أن الفرق بين ١٢٠ و ١٤١ هو ٢١ فيضرب هذا الأخير في ١٠ ويبحث عن العدد الأقرب من حاصل الضرب وهو ٢١٠ فيشاهد أنه ٢٠٩ وهو المطابق للعدد ٧ر٠ وبتوالي العمل هكذا يرى أن العدد المطلوب هو ١٤١٥٨٫٤٧ وذلك بقطع النظر عن مرتبة اعظم الآحاد وكيفية وضع العملية هي

لو ح = ٩٢٠٩ ١٦١ ٠ر

والعدد المطابق	٠ر١٦١٩٠٦٨	هو ١٤٥١٨
والعدد المطابق للباقي الاول	١٤١	هو ٤ر٠
والعدد المطابق للباقي الثاني	٢١	هو ٧ر٠

بند ١٧٨ المتمم الرقمي للوغارتم هو العدد الذي اذا اضيف اليه كان الحاصل ١٠ ومن هنا

يؤخذ أن المتمم الرقمي للوغارتم يتحصل من طرحه من ١٠ وذلك بطرح اول رقم

يوجد عن يمينه من ١٠ وطرح باقي أرقامه من ٩

والمتمم الرقمي يستعمل دائماً لاجتناب اللوغارتمات السالبة ولايجاد باقي حاصل

جمع مطروحاً منه عدة لوغارتمات بواسطة عمليات جمع وذلك بأن تؤخذ

المتممات الرقمية للوغارتمات التي يراد طرحها وتضاف الى اللوغارتمات

الاخرى وحيث أنه يشاهد بالسهولة أن حاصل الجمع يزيد عن الحاصل

المطلوب عشرات بعدد المتممات الرقمية فيلزم لتحصيل الناتج الحقيقي أن

تطرح هذه العشرات من حاصل الجمع وهذه العملية لا تجري الا على الجزء الصحيح

وحده.

امثلة حسابية محلولة باللوغارتم

المثال الاول اذا اريد ايجاد النتيجة المبينة بالمقدار

$$س = \frac{٢٣٩ \times ٨٢٧ \times ٥٤٣}{٧٦ \times ١٧}$$ تجرى العمل هكذا

لوغا ٢٣٩ = ٢، ٣٧٨٣٩٧٩

لوغا ٨٢٧ = ٢، ٩١٧٥٠٥٥

لوغا ٥٤٣ = ٢، ٧٣٤٧٩٩٨

متمم لوغا ٧٦ = ٨، ١١٩١٨٦٤

متمم لوغا ١٧ = ٨، ٧٦٩٥٥١١

لوغا س = ٤، ٩١٩٤٤٠٧

العدد مطابق ٩٠ ٩١٩٤٣٩٠ .... هو ٨٣٠٦٩

باقي أول ٠٠٠٠٠٠٠٠٧ ...... هو ٣٠ ر٠

باقي ثاني ١ .... هو ٢ ر٠

س = ٨٣٠٦٩ ر ٣٢

وباجراء عملية حسابية على هذا القدر يحدث س = ٨٣٠٦٩ ر ٣٣٢

وحينئذ لا يؤخذ من استعمال اللوغارتمات غير الارقام الستة الأول من هذا العدد فاذا لم يستعمل المتمم الرقمي فانه يلزم أن يستعمل لذلك بدل عملية الجمع جمعان وطرح واحد

(المثال الثاني) اذا اريد حساب 2^{64} يجرى العمل هكذا

لوغا ٢ = ٣٠١٠٣٠٠ ر٠

٦٤ × لوغا ٢ = ٢٦٥٩٢٠٠ ر ١٩

2^{64} ١٨٤٤٦٧٥

ولما كان يمكن وقوع غلط في حاصل ضرب ٦٤×٢ هو بالتقريب في ٣٢ من آحاد المرتبة السابعة وكان الفرق بين لوغارتمي العددين ١٨٤٤٦ و ١٨٤٤٧ هو ٢٣٦ آحاداً من هذه المرتبة أمكن أن يكون مقدار الخطأ الواقع في العدد المطلوب $\frac{٣٢}{٢٣٦}$ من واحد من خامس الأرقام بالابتداء من الشمال ومن هنا يعلم أنه لم يتحقق غير الأرقام الخمسة الأول

مثلا

لكن

المطلوب هي مرتبة العشرات فاذا اريد تحصيل الناتج مقرباً من ٠٫٠٠٠١ فانه يكفى حينئذ تحصيل خمسة ارقام وذلك بقطع النظر عن استعمال الاجزاء المتناسبة

المثال الرابع) اذا اريد حل المعادلة $(١٫٠٠١٢٥)^{س} = ٠٫٨٩٦٢٥$ فباجراء العمل يجد

$$س = \frac{لو(٠٫٨٩٦٢٥)}{لو(١٫٠٠١٢٥)} = -٨٧٫٦٨٨١$$

فى الربح البسيط والمركب

نمرة ١٧٩ اللوغاريتمات تستعمل ايضاً فى حل المسائل المتعلقة بربح النقود مثلاً اذا جعل ر رمزاً للربح العزنك الواحد فى السنة الواحدة فيكون ربح $\frac{ق}{١٠٠}$ فى هذه المدة ١٠٠ر وبناءً على ذلك يكون ربح المبلغ ح فى السنة الواحدة ح ر ويكون جـ ربحه فى مدة صحيحة او كسرية من السنين مبيناً بالرمز ك هو ك×ح ر وبالجملة اذا جعل ج رمزاً لما يؤول اليه المبلغ ح فى المدة ك من السنين حدث

$ج = ح (١ + ك ر)$ ومن هنا يؤخذ

ر =

ويكون المبلغ ح' في آخر السنة الثانية

$$\text{ح}'' = \text{ح}'\,(١+\text{ر}) = \text{ح}\,(١+\text{ر})^{٢}$$

ويكون المبلغ ح'' في آخر السنة الثالثة

$$\text{ح}''' = \text{ح}''\,(١+\text{ر}) = \text{ح}\,(١+\text{ر})^{٣} .$$

وبالاستمرار هكذا الى سنوات عددها ن يكون المبلغ الأصلي ح في آخر السنة ن

$$\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ح}\,(١+\text{ر})^{\text{ن}}$$

وبتطبيق اللوغارتم على هذا القانون نحصل

$$\text{لو ح}_{\text{ن}} = \text{لو ح} + \text{ن} \times \text{لو}\,(١+\text{ر})$$

وحينئذ تحصل بمقتضى هذا القانون واحدة من الكميات الاربع وهي $\text{ح}_{\text{ن}}$ ، ح ، ر ، ن اذا علمت الثلاث الاخرى منها .

بند ١٨٦ اذا فرض أن رب المال أضاف في كل سنة الى رأس ماله مبلغاً جديداً لا تزال تحصل عنه ارباح مركبة الى أن يستولاه من المقترض وجعلت ح ، ز ، هـ ، ل رموزاً للمبالغ التي يضعها في مبادى السنة الاولى والثانية والثالثة والرابعة ونحو ذلك و $\text{ح}_{\text{ن}}$ رمزاً للمبلغ الذي يحصل في آخر السنة ن فيكون

المبلغ

الباقي تحت يد المقترض مدة م سنة

$\text{حـ}(1+\text{ر})^{\text{م}}$

ويكون المبلغ ء في مدة م−١ سنة

$\text{ء}(1+\text{ر})^{\text{م}-1}$

ويكون المبلغ هـ في مدة م−٢ سنة

$\text{هـ}(1+\text{ر})^{\text{م}-1}$ وهلم جرا

وحينئذ يكون المبلغ الأخير في مدة سنة واحدة

$\text{ل}(1+\text{ر})$

وبناء على ذلك يحصل

$$\text{ج} = \text{حـ}(1+\text{ر})^{\text{م}} + \text{ء}(1+\text{ر})^{\text{م}-1} + \text{هـ}(1+\text{ر})^{\text{م}-2} + \dots + \text{ل}(1+\text{ر})$$

فإذا فرض أن حـ = ء = هـ = ... = ل فان الطرف الثاني من هذه المعادلة يؤول إلى متوالية هندسية حدها الاول $\text{حـ}(1+\text{ر})$ وأساسها $(1+\text{ر})$ وحينئذ يحصل (بعد التبسيط)

$$\text{ج} = \frac{\text{حـ}(1+\text{ر})\left[(1+\text{ر})^{\text{م}} - 1\right]}{\text{ر}}$$

والدفعة السنوية هي المبلغ الذي يتكفل بدفعه المقترض في كل سنة ليستوفي رب المال رأس ماله بأرباحه في مدة معينة من الزمن فاذا

جعل ج رمزاً لرأس المال الذي يقتضي دفعه لربه و ح رمزاً للمبلغ الذي
يدفع سنوياً في مدة من السنين عددها م فانه يمكن أن تعتبر الدفعات
التي يدفعها المقترض قبل انقضاء المدة كقرضة على رب المال فيكون
لمقدارها تعلق بالزمن الذي مضى من الابتداء الى انقضاء المدة المذكورة وحينئذ
تكون الدفعة الاولى التي استلمها رب المال قبل انقضاء المدة بسنين
عددها م-١ مساوية $\text{ح}(1+\text{ر})^{\text{م}-1}$ والدفعة الثانية مساوية
$\text{ح}(1+\text{ر})^{\text{م}-2}$ وهكذا الى الدفعة الأخيرة المساوية ح فقط وقد
سبق أن المال المقترض من ربه المبين بالرمز ج يكون ربحه مدة
م سنة مساوياً $\text{ج}(1+\text{ر})^{\text{م}}$

وحينئذ يحدث

$$\text{ج}(1+\text{ر})^{\text{م}} = \text{ح}(1+\text{ر})^{\text{م}-1} + \text{ح}(1+\text{ر})^{\text{م}-2} + \cdots\cdots + \text{ح}$$

وهذه المعادلة تؤول الى

$$\text{ج}(1+\text{ر})^{\text{م}} = \frac{\text{ح}\left[(1+\text{ر})^{\text{م}}-1\right]}{\text{ر}}$$

وهذه المعادلة تؤخذ منها واحدة من الكميات الاربع متى علم منها ثلاث
فاما تعيين مقدار ر فانه يتعلق بحل معادلة درجتها م واما مقدار
م فانه يستخرج من المعادلة

$$(د - ج ر)(١ + ر)^{م} = د \quad \text{التي ينتج منها} \quad (١ + ر)^{م} = \frac{د}{د - ج ر}$$

ومن هنا يحدث

$$م = \frac{لو د - لو(د - ج ر)}{لو(١ + ر)}$$

فاذا اريد المقارنة بين مقادير عدة مبالغ مدفوعة في ازمنة مختلفة فانه يلزم ان تكون هذه المبالغ منسوبة الى زمن واحد كما حصل في المسئلة السابقة مثلاً اذا فرض ان صرافاً استلم مبلغاً قدره د ولزم ان يدفعه بعد مدة من السنين عددها م فلاستخلاص هذا الصراف يلزم أنه يدفع لرب المبلغ المذكور شيأً قيمته ى يكون مدفوعاً مدة من السنين عددها ع واذا بحث عما يؤول اليه المبلغان د ، ى بعد انقضاء المدة تحصل

$$\frac{د}{(١ + ر)^{م}} \quad ، \quad \frac{ى}{(١ + ر)^{ع}}$$

لان المبلغ الاول مثلاً يعتبر كمقدار اصلي لرأس مال يؤول الى د بعد مدة سنين عددها م وينتج من ذلك انه اذا اخذ الفاضل بين الكسرين المذكورين كان هذا الفاضل سواء كان موجباً أو سالباً كناية عما يدفعه الصراف أو يستلمه في مقابلة الاستبدال واذا فرض أن هذا الفاضل لا يمكن دفعه بعد مدة من السنين قدرها ك وجعل هـ رمزاً

لمقداره مدة الاستبدال كان عندنا نبلغ بعد المدة ك مساويًا $هـ (١+ر)^{ك}$

ومكافئتها للحكمة

$$\left[\left(\frac{ح}{ء(١+ر)}\right) - \frac{ز}{ع(١+ر)}\right](١+ر)^{ك} = د(١+ر)^{ك-ح} د(١+ر)^{ك-ع}$$

الباب السابع

فى التوفيق والترتيب والتبادل وقضية نوتون

١٨٢ التوافيق لحروف عددها م أو الحواصل ضربها المختلفة التى كل واحد منها يشتمل على حروف عددها ح هى الحواصل الحادثة من كتابة هذه الحروف بجوار بعضها على وجه بحيث يكون كل توفيق مشتملاً على حروف عددها ح من غير أن يتكرر اثنان من هذه التوافيق

مثلاً التوافيق أو حواصل الضرب المختلفة المركبة من الحروف الأربعة

حـ ، د ، هـ ، و ومثنى هى

حد ، حهـ ، حو

دهـ ، دو

هـو

فيشاهد من هنا انه يلزم لتركيب هذه الحواصل المختلفة ان تكتب الحرف حـ

مع جميع

عددها ح من الحروف التي عددها م بجوار بعضها وتغيير سائر أوضاع
الحروف ومن هنا يؤخذ انه اذا كتبت تباديل كل من التوافيق لحروف عددها
م أو كل من حواصل ضربها التي كل واحد منها مشتمل على حروف عددها ح
حدث من ذلك التراتيب لحروف عددها م أو حواصل ضربها التي كل
واحد منها مشتمل على حروف عددها ح مثلاً التراتيب أو حواصل الضرب
المختلفة المركبة من الحروف الأربعة ج ، د ، ه ، و مثنى هي

جد ، دج ، جه ، هج ، جو ، وج ، ده ، هد ، دو ، ود ، هو ، وه
والتراتيب أو حواصل الضرب المختلفة المركبة من الحروف الأربعة المذكورة
ثلاث هي

ج د ه	ج د و	ج ه و	د ه و
ج ه د	ج و د	ج و ه	د و ه
ه ج د	و ج د	و ج ه	و د ه
د ج ه	د ج و	ه ج و	ه د و
د ه ج	د و ج	ه و ج	ه و د
ه د ج	و د ج	و ه ج	و ه د

بند ٢٨٩ ولبيان الكيفية التي بها يعلم عدد التراتيب لحروف عددها م أو لحواصل ضربها المركبة من حروف عددها ح والتباديل لحروف عددها م أو الحواصل المختلفة لحروف عددها م كل واحد منها مشتمل على حروف عددها ح يقال

حيث أنه يلزم لتكوين التراتيب لحروف عددها م مثنى ان نكتب على التوالى بجوار كل واحد منها الحروف الباقية التي عددها م−١ فيكون عدد التراتيب لحروف عددها م مثنى هو م(م−١)

وحيث انه يلزم لتكوين التراتيب لحروف عددها م ثُلَاثُ أن يكتب بجوار كل من تراتيب هذه الحروف مثنى كل من الحروف الباقية التي عددها م−٢ فيكون عدد التراتيب لحروف عددها م ثُلَاثُ هو م(م−١)(م−٢) لانه يحدث من كل من تراتيب الحروف المذكورة مثنى ترتيب ثلاثية عددها م−٢ وحيث أن عدد التراتيب مثنى هو م(م−١) فيكون م(م−١)(م−٢) دالاً على عدد التراتيب ثُلَاث وبمقتضى ما تقدم يكون عدد التراتيب لحروف عددها م رُبَاعَ هو

م(م−١)(م−٢)(م−٣)

وبناءً عليه يكون عدد تراتيب حروف عددها م أو مواضع ضربها التي كل واحد منها مشتمل على حروف عددها ٢ مساوياً على العموم

م (م - ١) (م - ٢) (م - ٣) (م - ٤) .... [م - (٢ - ١)]

فاذا فرض أن م = ٢ فان التراتيب تتحول الى تباديل يكون عددها مساوياً

٢ (٢ - ١) (٢ - ٢) (٢ - ٣) ------ × ٣ × ٢ × ١ واذا قلب الوضع حدث ١ × ٢ × ٣ × ٤ ....- (٢ - ٣) (٢ - ٢) (٢ - ١) وهذا هو المقدار المساوي لعدد تباديل حروف عددها ٢

ويمكن ايضاً تحصيل هذا المقدار الاخير بدون التفات الى القانون الدال على عدد التراتيب بأن يقال حيث أنه تحصل من الحرفين ح ، د التبادلان ح د ، د ح وانه يكفي لتكوين تباديل ثلاثة حروف أن يكتب بعد كل من هذه الحروف تبادلا الحرفين الاخيرين فيكون عدد التباديل لحروف عددها ٣ هو ٢ × ٣ وحيث انه يلزم لتكوين تباديل اربعة حروف أن تكتب بعد كل من هذه الحروف تباديل الحروف الثلاثة الباقية فيكون عدد التباديل لهذه الحروف الاربعة هو ٢ × ٣ × ٤ وبتوالي العمل هكذا يكون عدد تباديل حروف عددها ٢ مبيناً بالكمية ١ × ٢ × ٣ × ٤ ..... × ٢

بالبحث من قاعدة هذه القوى الصحيحة الى قانون به تحصل أى قوة . هـذا القانون هو الذى يعرف بقانون نوتون لكونه هو الذى استكشفه فاذا حسبت بواسطة عملية الضرب قوى س + ح بالابتداء من القوة الثانية حدث

$$(س + ح)^{٢} = س^{٢} + ٢ ح س + ح^{٢} \quad ب$$

$$(س + ح)^{٣} = س^{٣} + ٣ ح س^{٢} + ٣ ح س^{٢} + ح^{٣}$$

$$(س + ح)^{٤} = س^{٤} + ٤ ح س^{٢} + ٦ ح^{٢} س^{٢} + ٤ ح^{٣} س + ح^{٤}$$

وحينئذ يشاهد فى هذه القوى المختلفة أن قاعدة أسس الحرفين س ، ح تعلم بداهة غير انه لا يمكن معرفة القاعدة التى بموجبها تتكون المكررات الرقمية وحيث انه يلزم لتوضيح تركيب الحواصل أن نكتب الارتباطات التى تتولد منها المكررات فيكفى لذلك أن نجرى على الكميات ذات الحدين المختلفة من بعضها بالحد الثانى عملية الضرب بهذه المثابة

سَ^م + ل١ سَ^م + ل٢ | سَ^م + ل٢ سَ^{م-١} + ... + ب^م | س
+ ع | + ع ل١ | + ع ل٢ | + ع^{ن}_{م+١} | + ع^ل_م

ومن هنا يعلم أن قانون الأسس المفروضة للمجهول س م يتغير وأما قانون
المكررات فمنه يتبين أن مكرر الحد الأول يكون دائمًا ثابتًا للواحد ومكرر
الحد الثاني يكون من مجموع الحدود الثانية للجبريات من ذوات الحدين عددها
م + ١ ومكرر الحد الثالث مكونًا من مجموع حواصل ضرب مركبة من الحدود
الثانية للجبريات من ذوات الحدين عددها م ومأخوذة مثنى مضافًا إليها
مجموع هذه الحدود الثانية مضروبًا في ب ومن ذلك يتكون مجموع حواصل
ضرب مختلفة مركبة من الحدود الثانية للجبريات من ذوات الحدين عددها
م + ١ ومأخوذة مثنى ومكرر الحد الرابع يكون من مجموع حواصل ضرب
مركبة من الحدود الثانية للجبريات من ذوات الحدين عددها م ومأخوذة
ثلاث مضافًا إليها مجموع حواصل ضرب مركبة من هذه الحدود الثانية
مأخوذة مثنى ومضروبة في ب ومن ذلك يتكون مجموع حواصل ضرب
مختلفة مركبة من الحدود الثانية للجبريات من ذوات الحدين عددها
م + ١ ومأخوذة ثلاث وهلم جرا وحينئذ يكون الحد الأخير مساويًا

لحاصل ضرب الحدود الثانية للكميات ذات الحدين عددها م مضروبًا

في ل وبناءً على ذلك يكون هذا الحاصل كناية عن حاصل ضرب الحدود الثانية

للكميات من دون تكرير عددها م + ١ ومن هنا يؤخذ انه اذا كان القانون

السابق متحققًا في حاصل ضرب مضاريب عددها م كان مطردًا

في حاصل ضرب مضاريب عددها م + ١ وحيث انه محقق في حاصل ضرب

مضروبين فيكون مطردًا في حواصل ضرب جملة مضاريب

سند ١٨٧ فاذا فرض الآن ان كلا من الحدود الثانية للكميات ذات الحدين المضروبة

في بعضها مساوٍ للحد ح فان حاصل الضرب وهو

(س + ح) (س + ى) (س + ه) .... (س + ك) يؤول الى القوة الميمية للكمية س + ح

ويكون المكرر ح١ للحد الثاني من هذا الحاصل مساويًا للحد ح مكررًا بقدر

م الذي هو عدد المضاريب أعني م ح والمكرر ح٢ للحد الثالث مساويًا

للحد ح٢ مكررًا بقدر عدد حواصل ضرب مختلفة مكونة من حروف عددها

م ومأخوذة مثنى أعني $\frac{م(م-١)ح^٢}{١\times٢}$ والمكرر ح٣ للحد الرابع مساويًا

للحد ح٣ مكررًا بقدر عدد حواصل ضرب مختلفة مكونة من حروف عددها

م ومأخوذة ثلاث أعني $\frac{م(م-١)(م-٢)}{١\times٢\times٣}ح^٣$ وهلم جرا فاذًا يكون

[illegible] تحصيل ... [illegible]

$$(\text{س}+\text{ح})^{\text{م}} = \text{س}^{\text{م}} + \text{م}\,\text{س}^{\text{م}-١}\,\text{ح} + \frac{\text{م}(\text{م}-١)}{١\times٢}\,\text{ح}^{٢}\,\text{س}^{\text{م}-٢} + \frac{\text{م}(\text{م}-١)(\text{م}-٢)}{١\times٢\times٣}\,\text{ح}^{٣}\,\text{س}^{\text{م}-٣}$$

$$\dots\dots + \text{ح}^{\text{م}}$$

١٨٨ فاذا جعل $\text{ح}_{\text{ن}+١}$ رمزاً للحد الذي رتبته ن+١ في الطرف الثاني من القانون المتقدم أعني رمزاً للحد المسبوق بحدود عددها ن فانه يحدث

$$\text{ح}_{\text{ن}+١} = \frac{\text{م}(\text{م}-١)(\text{م}-٢)(\text{م}-٣)\dots(\text{م}-\text{ن}+١)}{١\times٢\times٣\times٤\dots\text{ن}}\,\text{ح}^{\text{ن}}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ن}}$$

وهذا المقدار هو المعروف بالحد العمومي لقوة الكمية $(\text{س}+\text{ح})^{\text{م}}$ لانه يمكن بواسطته استنتاج جميع الحدود بالابتداء من الحد الثاني بشرط ان يعوض في هذا المقدار على التوالي

$$\text{ن} = ١ ،\ \text{ن} = ٢ ،\ \text{ن} = ٣$$

مثلاً اذا اريد ايجاد الحد الخامس من القوة الثانية عشر للكمية س+ح فانه بعد اجراء التعويض م = ١٢ ، ن = ٤ وجب ان يكون م−ن+١ = ٩ وحينئذ يوجد من القانون المتقدم

$$\frac{١٢\times١١\times١٠\times٩}{١\times٢\times٣\times٤}\,\text{ح}^{٤}\,\text{س}^{٨} = ٤٩٥\,\text{ح}^{٤}\,\text{س}^{٨}$$ وهو الحد المطلوب

١٨٩ ويؤخذ من تحليل الكمية $(\text{ح}+\text{س})^{\text{م}}$ انه يمكن تحصيل مكرر أي حد

بواسطة ضرب مكرر الحد السابق عليه في الاس الذى يوجد به المجهول س في هذا الحد السابق وقسمة حاصل الضرب على الاس الذى يوجد به ح في الحد المذكور بشرط أن يضاف الى هذا الاس واحد أو بقسمه المكرر المذكور على عدد الحدود السابقة على الحد المطلوب واما الأسس فانها تتغير عن اصلها بمعنى أن اس المجهول س يتناقص عن اصله واحدًا فواحدًا من حد الى تاليه واس ح يتزايد عن اصله واحدًا فواحدًا

ويكفى للبرهنة على هذا القانون بوجه تام ان يفرض انه يراد تحصيل الحد المسبوق بحد ود عددها ء-١ وذلك بأن يغير الحد ء بالحد ء+١ في المقدار $ح_{ء+1}$ فيحدث

$$ح_{ء+1} = \frac{م(م-1)(م-2)\cdots(م-ء+1)(م-ء)}{1\times2\times3\times\cdots\times ء\times(ء+1)}\, ح^{ء+1}\, س^{م-ء-1}$$

وحينئذ يمكن بمقتضى منطوق القانون المذكور استنتاج الحد $ح_{ء+2}$ من الحد $ح_{ء+1}$

ويمكن بواسطة هذا القانون تكوين جميع حدود قوة الكمية $(س+ح)^م$ بالابتداء من الحد الأول $س^م$ ومن هنا يعلم أن عملية التحليل تكون قد انتهت متى تحصل الحد $ح^م$ لان اس المجهول س الذى يلزم ان يضرب فيه الحد $ح^م$ ليتحصل من ذلك الحد التالى له ليس الا صفرًا

ومن هنا يشاهد أن حدى هذا الكثير يشتملان على مضاريب الاعداد الصحيحة من م + ١ الى م ـ ح فاذا حذفت المضاريب المشتركة كان مقدار المكرر $\frac{ح}{م-ح+1}$ عين مقدار المكرر $\frac{ح}{ح+1}$

وثانياً أن مكرر الحد المسبوق بحدود عددها ح يكون كناية عن عدد حواصل ضرب مختلفة مركبة من حروف عددها م ومأخوذة نوناً نوناً ومكرر الحد المسبوق بحدود عددها م ـ ح كناية عن حواصل ضرب مختلفة بحروف عددها م ومأخوذة بمقدار م ـ ح لكن اذا تكونت الحواصل المركبة من حروف عددها م نوناً نوناً تحصل من ذلك حواصل مركبة من الحروف التي عددها م المذكورة ومأخوذة بمقدار م ـ ح وذلك بأن يقسم بالتوالى حاصل ضرب هذه الحروف على كل من الحواصل المأخوذة نوناً نوناً وحينئذ يكون عدد حواصل الضرب المأخوذة بمقدار م ـ ح مساوياً لعدد الحواصل المأخوذة نوناً نوناً

وثالثاً اذا جعل ك رمزاً المكرر الحد المسبوق بحدود عددها ح فان هذا الحد يكون كناية عن ك $ح^{م-ح}$ $ى^{ح}$ وحيث أن الكمية ذات الحدين س + ح لا تتغير بتغيير وضعى الحرفين س , ح فلا يحصل تغير فى تحليل الكمية $(س+ح)^م$

(س+ح)^م وحينئذ يكون تحليل هذه الكمية محتوياً مع الحد ك ح^ر س^(م-ر) على حد آخر لا يختلف عن ذلك الحد الا بكون الحرف ح وضع فيه بدل الحرف س، س بدل ح وهو بناءً على ذلك كناية عن ك س^ر ح^(م-ر) المتبوع بحدود عددها م ومن البديهي بمقتضى قانون اسس المجهول س في تحليل الكمية (س+ح)^م أن الحد ك س^ر ح^(م-ر) يكون متبوعاً بحدود عددها م وحينئذ يكون مكرر الحد المتبوع بحروف عددها م عين مكرر الحد المسبوق بحدود عددها م.

١٩١ ولتحصيل تحليل الكمية (س-ح)^م يكفي ان يوضع -ح بدل ح في تحليل هذه الكمية فتكون الحدود الزوجية المرتبة التي يرى فيها ان ح مرفوع الى قوى فردية المرتبة مسبوق بالعلامة - والحدود الفردية المرتبة باقية على حالها وحينئذ يحدث

$$(س-ح)^م = س^م - م ح س^{م-١} + \frac{م(م-١)}{١×٢} ح^٢ س^{م-٢} - \frac{م(م-١)(م-٢)}{١×٢×٣} ح^٣ س^{م-٣} + ...$$

١٩٢ واذا فرض في تحليل الكمية (س+ح)^م أن ... يوجد أن مجموع مكررات تحليل هذه الكمية ... الحدين المتطرفين

فاذا فرض مثل ذلك في تحليل الكمية $(س - ح)^{٢}$ شوهد أن مجموع مكررات الحدود الفردية المرتبة يساوي مجموع مكررات الحدود الزوجية المرتبة

بند ١٩٣ ويمكن لتحليل قوة أي كمية ذات حدين ان يبداء بتحليل قوة درجتها كدرجة تلك القوة للكمية س + ح أو س - ح ثم يستعوض الحرفان س ، ح بحدي الكمية ذات الحدين المفروضة وحينئذ يلزم لتحصيل تحليل الكمية $(٢ س^{٣} - ٣ ح^{٢} ص)^{٥}$ ان يبداء بتحصيل تحليل الكمية $(س - ح)^{٥}$ وهو

$$س^{٥} - ٥ ح س^{٤} + ١٠ ح^{٢} س^{٣} - ١٠ ح^{٣} س^{٢} + ٥ ح^{٤} س - ح^{٥}$$

ثم يوضع $٢ س^{٣}$ بدل س ، $٣ ح^{٢} ص$ بدل ح فيحدث

$$(٢ س^{٣} - ٣ ح^{٢} ص)^{٥} = ٣٢ س^{١٥} - ٢٤٠ ح^{٢} ص س^{١٢} + ٧٢٠ ح^{٤} ص^{٢} س^{٩} - ١٠٨٠ ح^{٦} ص^{٣} س^{٦}$$
$$+ ٨١٠ ح^{٨} ص^{٤} س^{٣} - ٢٤٣ ح^{١٠} ص^{٥}$$

ويمكن وضع هذه العملية هكذا

	$\frac{٥}{١}$	$\frac{٤}{٢}$	$\frac{٣}{٣}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٥}$
١	٥	١٠	١٠	٥	١
$٣٢ س^{١٥}$	$١٦ س^{١٢}$	$٨ س^{٩}$	$٤ س^{٦}$	$٢ س^{٣}$	١
١	$٣ ح^{٢} ص$	$٩ ح^{٤} ص^{٢}$	$٢٧ ح^{٦} ص^{٣}$	$٨١ ح^{٨} ص^{٤}$	$٢٤٣ ح^{١٠} ص^{٥}$

$$٣٢ س^{١٥} - ٢٤٠ ح^{٢} ص س^{١٢} + ٧٢٠ ح^{٤} ص^{٢} س^{٩} - ١٠٨٠ ح^{٦} ص^{٣} س^{٦} + ٨١٠ ح^{٨} ص^{٤} س^{٣} - ٢٤٣ ح^{١٠} ص^{٥}$$

فاما العشر الاول فهو مكون من جملة كسور بسوطها اعداد صحيحة آخذة

في التناقص

المقدارين التخيليين $ل + ى\sqrt{-1}$ و $ل - ى\sqrt{-1}$ ولوحظ ما تقرر في بشأن قوى $\sqrt{-1}$ تحصل القانونان

$$(ل + ى\sqrt{-1})^م = \begin{cases} ل^م - \frac{م(م-1)}{1\times2} ل^{م-2} ى^2 + \frac{م(م-1)(م-2)(م-3)}{1\times2\times3\times4} ل^{م-4} ى^4 + ... \\ + \left[م ل^{م-1} - \frac{م(م-1)(م-2)}{1\times2\times3} ل^{م-3} ى^3 + ...\right] ى\sqrt{-1} \end{cases}$$

و

$$(ل - ى\sqrt{-1})^م = \begin{cases} ل^م - \frac{م(م-1)}{1\times2} ل^{م-2} ى^2 + \frac{م(م-1)(م-2)(م-3)}{1\times2\times3\times4} ل^{م-4} ى^4 - ... \\ - \left[م ل^{م-1} - \frac{م(م-1)(م-2)}{1\times2\times3} ل^{م-3} ى^3 + ...\right] ى\sqrt{-1} \end{cases}$$

في استخراج جذور الكميات الكثيرة الحدود

١٩٥ — قد شوهد في علم الحساب أن كيفية تركيب مربع مجموع حدين ومكعبه توصل الى القواعد المتعلقة باستخراج كل من الجذر التربيعي والتكعيبي للاعداد ويمكن أن تكون معرفة الحدين الاولين $س^م + م ح س^{م-1}$ من تحليل الكمية $(س + ح)^م$ معدة لتكوين الطرق التي ينبغي اتباعها في استخراج جذور الاعداد على أي وجه كانت درجتها وبذلك يتوصل الى قواعد مشابهة للقواعد التي تستعمل في استخراج كل من الجذر التربيعي والتكعيبي ولما كانت هذه القواعد نادرة الاستعمال وجب علينا هنا ان نعرض عن ذكرها ونتصدى لذكر استخراج جذور الكميات الحرفية

الاخيرة أن يضاف الى ثلاثة امثال مربع ء س - ٣ ء س حاصل الضرب المركب
من ثلاثة امثال ء س - ٣ ء س ى + ى ومربع + ى ويضرب هذا الحاصل
في + ى وطرحه من الباقي الثاني يكون الباقي صفراً وحينئذ يكون
ء س - ٣ ء س + ى هو الجذر التكعيبي للكمية الكثيرة الحدود المفروضة

الجذر المحدود ها اولا فيحصل الحد الاول من جذرها ثم يقسم حدها الثاني على القوة التي درجتها (م-١) للحد الاول من الجذر مضروبة في م فيحصل الحد الثاني من هذا الجذر ثم تطرح من الكمية الكثيرة الحدود القوة المبينة لمجموع حدي الجذر المحصلين ويقسم الحد الاول من الباقي على القوة التي درجتها (م-١) للحد الاول من الجذر مضروبة في م فيحصل الحد الثالث من هذا الجذر وهلم جرا

ويشاهد بالسهولة انه اذا كانت الكمية الكثيرة الحدود المفروضة قوة ميمية صحيحة ان هذه العمليات توصل الى باقي معدوم وكذلك اذا كانت هذه العمليات توصل الى باقي معدوم فان الكمية الكثيرة الحدود المفروضة تكون قوة ميمية صحيحة ويكون مجموع الحدود المتحصلة بهذه المثابة هو الجذر المطلوب للكثيرة الحدود المفروضة

ويشاهد ايضا بمقتضى براهين مشابهة للبراهين المعروفة في شأن الجذر التربيعي (٥٩) انه اذا كانت الكمية الكثيرة الحدود المفروضة مرتبة بحسب الدرجات التنازلية للحرف الاصلي فلا شك أن العملية تكون غير منتهية متى كان الجذر محتويا على حد مشتمل على الحرف المذكور بأس

اذا ضرب

[illegible] كثيرة الحدود المتحصلة من عملية الضرب

جذر ميمي كالجذر ع كان الجذر الميمي كثيرة الحدود المفروضة

في الاعداد المشكلة أي التي على صورة الاشكال الهندسية وفي معرفة الاكوام المنتظمة من الكلل

بند ١٩٨ يوجد بين مكررات قوتين متواليتين للكمية س + ح ارتباطات تستنبط منها عدة قواعد لا بأس بمعرفتها

مثلاً اذا فرض أن القوة الميمية للكمية س + ح هي

$$\text{س}^{\text{م}} + \text{ج}_{١}\,\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}-١} + \text{ء}_{١}\,\text{ح}^{٢}\,\text{س}^{\text{م}-٢} + \text{ه}_{١}\,\text{ح}^{٣}\,\text{س}^{\text{م}-٣} + \text{الخ}$$

وضربت هذه الكمية الكثيرة الحدود في س + ح كان حاصل الضرب هو

$$\text{س}^{\text{م}+١} + \text{ج}_{١}\,\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}} + \text{ء}_{١}\,\text{ح}^{٢}\,\text{س}^{\text{م}-١} + \text{ه}_{١}\,\text{ح}^{٣}\,\text{س}^{\text{م}-٢} + \ldots\ldots \text{الخ}$$

$$\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}} + \text{ج}_{١}\,\text{ح}^{٢}\,\text{س}^{\text{م}-١} + \text{ء}_{١}\,\text{ح}^{٣}\,\text{س}^{\text{م}-٢} + \ldots\ldots \text{الخ}$$

ومن هنا يؤخذ أنه يكفي لتحصيل أي حد من القوة التي درجتها (م + ١) للكمية س + ح أن يضاف الى مكرر الحد الذي من رتبته في القوة الميمية مكرر الحد السابق عليه

من الصف الثالث يكون ١+٠ أى ١ وحده الثانى ١+١ أى ٢ وحد الثالث ٠+١ أى ١ وأما الصف الرابع فانه يتكون من الثالث كما أن الثالث تكون من الثانى وهلم جرا وحيث أن الحدين الاولين من الصف الثانى يمكن اعتبارهما ككررى القوة الاولى للكمية س+ح فتستنبط من ذلك القاعدة المتقدمة وهى أن حدود الصف الثالث تكون مكررات لتحليل الكمية (س+ح)^{٢} ومكررات الصف الرابع تكون مكررات لتحليل الكمية (س+ح)^{٣} وهكذا

ويطلق على هذا الجدول الذى يمكن تطويله الى غير نهاية اسم المثلث الحسابى للمعلم باسكال

تنبيه وبمقتضى تركيب المثلث الحسابى يشاهد بالسهولة أن الحد الذى مرتبته ع من أى صف أفقى هو عبارة عن مجموع الحدود الاول التى عددها ع من الصف الافقى السابق عليه لانه اذا لوحظ الحد ٥٦ وهو الحد السادس من الصف الرابع يشاهد أنه مكون من ضم العددين ٢١، ٣٥ الى بعضهما وهذان العددان يوجدان على يمين الحد المذكور فى الصف الثالث والرابع والثانى من العددين المذكورين وهو ٣٥ هو مجموع الحدين

م٫ ن٫ والأخير من هذين الحدين وهو ٢٠ مكون من ١٠ ، ١٠ والعدد الأخير من هذين العددين وهو ١٠ هو مجموع ٦ و ٤ و ٥ و ٤ هو مجموع العددين ٣ و ١ وحينئذ يكون ٥٦ = ١ + ١٥ + ١٠ + ٦ + ٣ + ١

٢٠١ – القاعدة المتقدمة (في بند ١٩٨) المستعملة اساسا لتكوين المثلث الحسابي والخاصية المذكورة في البند السابق يمكن استنباطهما بالسهولة من نظرية التوافيق لانه قد شوهد أن مكرر الحد الذي درجته (م + ١) من القوة التي درجتها (م + ١) للكمية س + ح يساوي عدد توافيق قدرها م + ١ من الحروف التي كل حاصل ضرب مكون منها مشتمل على حروف عددها م وحيث أن هذه التوافيق تعتبر مركبة من جزئين أحدهما التوافيق التي لا تحتوي على واحد من الحروف كالحرف ح مثلا وهي عبارة عن عدد التوافيق م المركبة من الحروف التي كل واحد من حواصل ضربها مشتمل على حروف عددها م وثانيهما التوافيق المحتوية على الحرف ح التي عددها عبارة عن عدد التوافيق م المركبة من الحروف التي كل واحد من حواصل ضربها مشتمل على حروف عددها م – ١ فيتحصل بملاحظة ما تقدم في (بند ١٨٤)

(ن + ع = م، + (م)م-١ .... (١)

وهذه نتيجة برهنا على القاعدة المتقدمة (ن ١٩٨)

ويلزم برهنة نظرية التوافيق على أن الحد الذي رتبته

ع من صف أفقي من المثلث الحسابي يكون مساويًا لمجموع الحدود الأولى

التي عددها ع من الصف الأفقي السابق عليه انتبه على أن الحد الأول

من صف أفقي الذي رتبته (م+١) من المثلث الحسابي يكون موجودًا

في الصف الرأسي الذي رتبته (م+١) ومن هنا يوجد أن الحد الذي رتبته

ع من الصف الأفقي الذي رتبته (م+ع) يكون موجودًا في الصف

الرأسي الذي رتبته (م+ع) يعني أنه يكون واحدًا من مكررات تحليل

الكمية (س+ص)^{م+ع-١} وحينئذ يكون مكرر الحد الذي رتبته (م+١)

من هذا التحليل لأنه يشغل في الصف الأفقي الرتبة (م+١) وبناء على

ذلك يكون هذا العدد كناية عن عدد التوافيق م+ع-١ المركبة من

حروف التي كل واحد من حواصل ضربها مشتمل على حروف عددها م

أو (م+ع-١)ع

إذا تقرر هذا ووضع في القانون (١) م+ع-١ بدل م تحصل من ذلك القانون

(م+ع-١)ع =

تسمى الاعداد الهرمية للمثلثة وسيأتي بيان هذه التسمية

ومنتهى ذلك أن يكون مجموع الاعداد المشكلة الأول التي عددها ع

ورتبتها ح مساويا لعدد ذي رتبة ع ومرتبته ح+١ وهذا العدد

هو ناتج متحصل من القانون المتقدم (في ص ١٨٥) في شأن عدد التوافيق

التي كل واحد من حواصل ضربها مشتمل على حروف عددها ح بالنسبة للحروف

التي عددها م فاذا وضع في هذا القانون ع+ح−١ بدل م يحصل

$$\frac{ع(ع+١)(ع+٢)\ldots(ع+ح)}{١\times٢\times٣\ldots(ح+١)} \ldots\ldots (٢)$$

ويلزم لتحصيل مجموع الاعداد الأول المعتادة ١، ٢، ٣، ...، ع ان يجعل

ح = ١ في القانون (٢) فيكون $\frac{ع(ع+١)}{٢}$ هو المجموع المطلوب وهذا موافق

لما تقدم في المتواليات العددية

تنبيه واكوام الكلل مركبة من جملة صفوف افقية مكيفية الوضع بحيث تكون

كلل كل صف موجودة فوق اخلية كلل الصف التالي له من الجهة السفلى وجميع

الكلل متماسة وواحدة في العيار

وفي الكوم المثلثي يكون على صورة هرم مثلثي قاعدته مثلث متساوي الأضلاع

يكون كل صف مكونا من جملة قطارات من الكلل بحيث يرى عند الابتداء من

احد

[illegible] بنتهى بكمية وحيث أن كل [illegible]

[illegible] مباشرة أن [illegible]

[illegible]

[illegible] واحدها على الكره بعده [illegible]

[illegible] وطلب

[illegible] كل عدد منها م أو عدد مشتق مرتبته م هو $\frac{م(م+١)}{٢}$ وهذا المقدار اذا وضع فيه م-١ بدل م نحصل $\frac{(م-١)م}{٢}$ ولا يخفى ان مجموع هذين المقدارين يساوى $م^{٢}$ ..

ومن هذه الخصوصية يؤخذ ان مجموع المتقدم $١+٢^{٢}+٣^{٢}+\dots+ع^{٢}$ يساوى المجموع المكون من حدود أعدادها ع تتركب منها متسلسلة الاعداد المثلثية مضافا اليه المجموع المكون من حدود أو عددها ع-١ تتركب منها هذه المتسلسلة وحيث تقدم أن المجموع المكون من الاعداد الاول الى عددها ع يساوى $\frac{ع(ع+١)(ع+٢)}{١×٢×٣}$ فاذا وضع فى هذا المقدار ع-١ بدل ع نحصل $\frac{(ع-١)ع(ع+١)}{١×٢×٣}$ واذا اضيف هذان المقداران الى بعضهما نحصل عدد كلل الكوم المربعى وهو

$$\frac{ع(ع+١)(٢ع+١)}{١×٢×٣} \quad \dots (٤)$$

والكوم

وزيادة على ذلك يكون جـ د لا على كمية صحيحة لان م جـ د ع ك كميتان صحيحتان فاذا ضرب طرفا المتساوية المذكورة فى ا ثم قسما على ع حدث

$$م \frac{جـ ا}{ع} = ا ك + \frac{جـ ا}{ع}$$

ومن هذه المتساوية الاخيرة يؤخذ ان الكمية ع التى تقسم الحاصل جـ ا تقسم ايضاً الحاصل جـ ا .

واذا فرض أن جـ كمية جبرية وقسمت الكمية ع على الكمية جـ فانه يتوصل الى باق درجته دون درجة جـ ويجعل م رمزاً للعدد الذى يلزم ضرب هذا الخارج فيه لاجل حذف ما به من المقامات و ك رمزاً للكمية الكثيرة الحدود الصحيحة الحادثة من عملية الضرب و جـ رمزاً للحاصل الحادث من ضرب م فى باقى القسمة ايضاً فيحصل

$$م ع = جـ ك + جـ$$

ولا ينعدم جـ لانه لو انعدم للزم ان يكون م ع قابلاً للقسمة على جـ مع ان جـ اولى من مضاريبه جـ وهذا محال وزيادة على ذلك يكون جـ ا لا على كمية صحيحة لان م ع و جـ ك كميتان صحيحتان فاذا ضرب طرفا المتساوية الاخيرة فى ا ثم قسما على ع حدث

$$م ا = \frac{جـ ك ا}{ع} + \frac{جـ ا}{ع}$$

ويؤخذ

صور مستقدمة ببرهان بها يتم بسهولة على أن الجذر بأى درجة لكمية صحيحة
لا يمكن أن يكون كمية كسرية وهذه البرهنة لا تختص بمستقدمة في
شأن الأعداد الصحيحة (سحيفة ١٢٩)

في القاسم المشترك الأعظم بين
عدة كميات جبرية صحيحة

بند ٢٠٨ يطلق اسم القاسم المشترك الأعظم بين عدة كميات جبرية صحيحة
على حاصل ضرب جميع العوامل الأولية العددية والحرفية المشتركة بين
هذه الكميات

بند ٢٠٩ ويؤخذ من هذا التعريف أن القاسم المشترك الأعظم بين عدة حدود
يتحصل بهذه الكيفية وهي أنه يبحث عن القاسم المشترك الأعظم بين معاملاتها
العددية ويكتب عقب هذا العدد كل حرف مشترك بين جميع الحدود
بأصغر أس له وحينئذ يلزم لإيجاد القاسم المشترك الأعظم بين الحدود
٤٣٢ ح٤ د٣ ش ، ٢٧٠ ح٣ د٣ ش و ٩٠ ح٢ د٢ ش أن يبحث في مبدأ
الأمر عن القاسم المشترك الأعظم بين الأعداد ٤٣٢ ، ٢٧٠ و ٩٠ وحيث
أنه ١٨ فيكون القاسم المشترك الأعظم بين الحدود المفروضة هو
١٨ ح د ش

بعد ان الحد يحتوي دش فاذا قسمت الكمية م على ح ش ق والكمية د على ٣ ش نحصل خارجان صحيحا

ح = ٦ ح٢ ش٢ + ١١ ح ش٢ − ١٠ اش − ٧ ح ص س + ١٤ ص

ق د = ٢ ح٢ ش + ح ش٣ + ٢ ش + ٢ ى − ٢ ح

وحينئذ يكون القاسم المشترك الأعظم بين الكميتين م ، د الكثيرتي الحدود مساويًا القاسم المشترك الاعظم بين الكميتين ح ، ٤ مضروبًا في دش

(١١) ولنبحث الآن عن الكيفية التي يلزم سلوكها في تعيين القاسم المشترك الاعظم بين الكميتين ح ، ٤ الصحيحتين كثيرتي الحدود وغير المحتويتين على مضاريب مشتركة فنفرض أن هاتين الكميتين تكونا مرتبتين بالنسبة للحرف س وأن درجة الكمية ٤ لا تزيد عن درجة الكمية ح فان كانت الكمية ٤ تقسم الكمية ح قسمة صحيحة فانها تكون هي القاسم المشترك الاعظم المطلوب فاذا قسمت الكمية ح على الكمية ٤ وفرضت أن القسمة غير صحيحة وتحصل من ذلك خارج قسمة صحيح كالخارج ك وباقي كالباقي ق ودرجته اقل من درجة الكمية ٤ بالنسبة الى س تحصلت من ذلك المتساوية

ح =

د من مضاريب الكمية ١

و اذا كانت الكميتان ح ، ١ الكثيرتا الحدود محتويتين على حرف واحد كالحرف

س فان مكررات قوى هذا الحرف تكون اولية مثلا في كل كمية كثيرة الحدود

لانه قد فرض انه حذف من كل منهما بين الكميتين سائر مضاريب الحدود

ويتبع من ذلك ان القاسم المشترك الاعظم بين الكميتين ح ، ١ الكثيرتي

الحدود وهو حاصل ضرب المضاريب الاولية المشتركة بين الكميتين لا يتغير

اذا ضرب المقسوم ح في مكرر الحد الاول من الكمية ١ او في اي مضروب

لهذا المكرر وبهذه الكيفية تجرى عملية القسمة الاولى الجزئية بلا كسور

وباجراء عملية مشابهة للمتقدمة في اثناء قسمة ح على ١ يحصل مقسوم

جزئي لا يكون فيه مكرر الطرف الاول قابلا للقسمة على مكرر الحد الاول

من المقسوم عليه ويتوالى العمل هكذا الى ان نصل الى باق كالباقي ق تكون

درجته دون درجة الكمية ١ يلزم لايجاد القاسم المشترك الاعظم بين

الكميتين ح ، ١ الكثيرتي الحدود ان تقسم الكمية ١ على الكمية ق بشرط

ان يحذف فيما يوجد من المضاريب المشتركة بين حدود الكمية الباقية ق

حيث انه لا يوجد مثلها في الكمية ١ وباجراء هذه العمليات على درجات

البواقي

تمرين

٣ س^{٤} − ٤ س^{٣} − ٦ س^{٢} − ١٠ س − ٥ | س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٣ س + ١

− ٣ س^{٤} − ٩ س^{٣} − ٩ س^{٢} − ٣ س | ٣ س − ٥

− ٥ س^{٣} − ١٥ س^{٢} − ١٥ س − ٥

− ٥ س^{٣} + ١٥ س^{٢} + ١٥ س + ٥

فيكون القاسم المشترك الأعظم هو س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٣ س + ١

٢١٢ وقبل الانتقال الى الاحوال التى تكون فيها الكميات الكثيرة الحدود محتوية على عدة حروف يلزم بيان الكيفية التى يمكن بها ايجاد القاسم المشترك الأعظم بين عدة كميات متى علم القاسم المشترك الأعظم بين كميتين فاذا كان المطلوب ايجاد القاسم المشترك الأعظم بين الكميات الاربع ح، ء، هـ، و يفرض أن و هو القاسم المشترك الأعظم بين الكميتين ح، ء وأن وَ هو القاسم المشترك الأعظم بين الكميتين و، هـ وأن وً هو القاسم المشترك الأعظم بين الكميتين وَ، و فيكون القاسم المشترك الأعظم بين الكميات الاربع ح، ء، هـ، و هو وً لان و ما كان يحتوى على سائر المضاريب الأولية المشتركة

بالنسبة الى الكمية م هو ح = ص٢ - ١ والقاسم المشترك الأعظم بين قوى
س بالنسبة الى الكمية د هو ء = ص٢ - ٢ ص + ١ = (ص - ١)٢ والقاسم
المشترك الأعظم بين ح و ء هو ص - ١
فاذا قسمت الكمية م على ص - ١ والكمية د على ص٢ - ٢ ص + ١ تحصل
من ذلك الخارجان

م١ = ٢ (ص - ٢) س٢ + ٣ س - (٢ ص - ١)

و د١ = ٣ (ص - ٢) س٢ + ٧ س - (٣ ص + ١)

ولكي يكون خارج قسمة الكمية م١ على الكمية د١ صحيحين تضرب الكمية
م١ في ٣ فيتحصل الباقي

- ٥ س٢ + ٢ (٣ ص + ١) س - ٣ (٢ ص - ١)

ويلزم لتوالي عملية القسمة ان يضرب المقسوم الجزئي الثاني في ٣ (ص - ٢)
فيتوصل الى باق ذي درجة اولى بالنسبة الى س هو

(١٨ ص٢ - ٣٠ ص + ١٢) س - (١٨ ص٢ - ٣٠ ص + ١٢)

فاذا حذف من هذا الباقي المضروب ١٨ ص٢ - ٣٠ ص + ١٢ آل الى

ق = س - ١

وبقسمة الكمية م١ على الباقي ق يكون باقي هذه القسمة صفرا

وحينئذ يبحث عن القاسم المشترك الأعظم بين هاتين الكميتين الكثيرتي الحدود

الأخيرتين أو عن القاسم المشترك الأعظم بين

٢ د٢ س٢ + ٧ د س − ٦ ، ٣ د س + ٢

فيرى أنه ٣ د س + ٢ وحيث أن هذا القاسم يقسم الكمية أ قسمة صحيحة

فيؤخذ من ذلك أن ٣ د س + ٢ هو القاسم المشترك الأعظم بين

الكميتين الكثيرتي الحدود ح ، أ

ولنذكر للتمرين مثالين هما

الأول ح = ٦ س٣ − ٦ ص س٢ + ٢ ص٢ س − ٢ ص٣

أ = ١٢ س٢ − ١٥ ص س + ٣ ص٢

فالقاسم المشترك الأعظم بين هاتين الكميتين هو س − ص

والثاني ح = (د − هـ) س٢ + (٢ هـ د − ٢ د هـ) س + د٢ د − د٢ هـ

أ = (هـ د − د هـ + د٢ − د هـ) س + د٢ هـ + د د٢ − د٢ د − د د هـ

فالقاسم المشترك الأعظم بين هاتين الكميتين هو د − هـ

في تحليل الدلالات التامة لكمية كالكمية س الى

مضاريب بدرجة أولى

٢١٦ ويطلق على الكمية الجبرية اسم الدلالة التامة لحرف أو لعدة حروف

عددها م كالمضاريب س ـ ح ، س ـ ء ، س ـ هـ ، فى وذلك بجعل
ح ، ء ، هـ ، فى رموزاً للكيات مشتملة على المتغير س ويمكن أن
تكون هذه الكيات مقادير تخيلية توضع بالصورة ل + ف √-١
فان كان مكرر الحد الأول من الدلالة غير الواحد فانه يتحصل من قسمتها
على هذا المكرر خارج درجته عين درجتها يتحلل بالمثابة المتقدمة فاذا جعل
م رمزاً لمكرر الحد الأول فان الدلالة المذكورة تكون مساوية لحاصل
ضرب يوضع بالصورة م (س ـ ح) (س ـ ء) ... فى

بند ٢١٧ النظريات المتقدمة (فى بندى ٢٠٦ ، ٢٠٧) تطبق على المضاريب التى بدرجة
اولى من الدلالات التامة ولا تختلف عنها الا ببعض تغيير فى منطوق
المسائل وبراهينها

النظرية الاولى

بند ٢١٨ أى مضروب بدرجة اولى كالمضروب س ـ ح الذى يقسم
حاصل ضرب الدلالتين التامتين م ، م يقسم بالضرورة ولحدة
منهما لانه اذا كانت الدلالة م لا تقبل القسمة على س ـ ح تحصل من
القسمة خارج صحيح كالخارج ك بالنسبة الى س وباق كالباقى ر غير المحتوى
س وحينئذ تحصل هذه المتساوية وهى

= م

$$\text{د} = (\text{س} - \text{ح}) \times \text{ك} + \text{ر}$$

ومنها يؤخذ

$$\frac{\text{د}}{\text{س} - \text{ح}} = \text{ك} + \frac{\text{ر}}{\text{س} - \text{ح}}$$

وينبغى بالفرض ان يكون $\frac{\text{د}}{\text{س} - \text{ح}}$ كناية عن دلالة تامة للمتغير س وحيث ان الباقى ر كمية غير محتوية على س فيلزم ان يكون $\frac{\text{ر}}{\text{س} - \text{ح}}$ دلالة تامة للمتغير س وعلى ذلك اذا كان س-ح لا يقسم الدلالة د يلزم ان يكون قاسما للدلالة ر

النظرية الثانية

بند ٢١٩ أى دلالة تامة للمتغير س لا يكون لها غير جملة واحدة من المضاريب التى بدرجة اولى

وللبرهنة على هذه النظرية يفرض حاصل الضرب

$$\text{ح}\,(\text{س} - \text{ح}')(\text{س} - \text{ى}')(\text{س} - \text{ه}') \ldots\ldots\ldots (\text{س} - \text{ح}')$$

فاذا جعل ح رمزا لمضروب غير محتو على س وفرض ان هذا الحاصل يساوى حاصل ضرب آخر هو

$$\text{ح}'\,(\text{س} - \text{ح}')(\text{س} - \text{ى}')(\text{س} - \text{ه}') \ldots\ldots\ldots (\text{س} - \text{ى}')$$

فان المضروب س-ح الذى يقسم الحاصل الثانى يكون قاسما بالضرورة لحاصل

ولا يفرض للحد الأول مكور غير الواحد لانه ان اختلف عن الواحد قسمت سائر

حدود المعادلة على هذا المكور بدون أن يختل تعادلها

٢٢٢ يرمز على وجه الاختصار لدلالات كية كالكية س بالرموز

د(س) و ء(س)، ه(س) والخ ويرمز أيضاً لدلالات الكيتين س، ص بالرموز

د(س،ص)، ء(س،ص)، والخ ولابد من اختلاف الرمز الموضوع امام القوسين

اذا اختلفت الدلالات المذكورة لكن اذا تكرر الحرف الواحد المستعمل بهذه المثابة

في عملية حسابية كان دالاً على دلالات مركبة بكيفية واحدة وحينئذ اذا كانت

دلالة مبينة بالرمز د(س) فالرمز د(ح) يكون دالاً على ما تؤول اليه

هذه الدلالة اذا وضع فيها ح بدل س والرمز د(ص-ى) يكون دالاً

على ما تؤول اليه تلك الدلالة اذا وضع فيها ص-ى بدل س والرمز

د(٣) يكون دالاً على ما تؤول اليه عندما يفرض فيها أن س = ٣ وكذلك

يكون الرمز د(س،٣) دالاً على ما تؤول اليه الدلالة ء(س،ص) عندما يفرض

فيها أن ص = ٣ وأن س يكون باقياً على حاله

٢٢٣ ولكي يحسب بأبسط طريقة المقدار الذي يكون لدلالة تامة للكية

س عندما يفرض للتغير س مقدار رقمي يجري العمل كما في هذا المثال وهو

لتفرض الكية الكثيرة الحدود

٤ س٥ − ١٣ س٤ + ٥ س٣ − ٤ س٢ − ٨

ويفرض أنه يراد تحصيل مقدار هذه الكمية الكثيرة الحدود عندما يكون س=٣

فيجرى العمل بهذه المثابة وهى .

٤×٣−١٣=−١ ، −١×٣+٥=+٢ ، +٢×٣−٤=+٢

، +٢×٣=+٦ ، +٦×٣−٨=+١٠

وحينئذ يكون العدد ١٠ هو الناتج المطلوب لان هذا العدد يكون بموجب

هذه العمليات مساويًا

٤×٣٥ − ١٣×٣٤ + ٥×٣٣ − ٤×٣٢ − ٨

بند ٢٢٤ ويطلق اسم جذر المعادلة على كل كمية أو مقدار تحليلى اذا وضع فى

هذه المعادلة بدل المجهول صيرها متطابقة

والحل العمومى للمعادلات يختص بايجاد مقادير الجذور بالنسبة لمكررات

جميع المعادلات المتحدة فى الدرجة وقد صار البحث مدة طويلة عن هذا

الغرض وذُكِرَت (فى بند ٨٥) الكيفية التى يحصل التوصل بها الى حل المعادلة ذات الدرجة

الثالثة وسيأتى بيان الكيفية التى يتوصل بها الى حل المعادلة ذات الدرجة

الرابعة غير أن القوانين المتحصلة بهذه المثابة توضع بصورة لا يمكن استعمالها

فى ايجاد المقادير الرقمية للجذور بواسطة استبدالها بمقادير المكررات ما لم تكن

هذه الأخيرة محققة ببعض شروط خصوصية كما تقدم ذلك في المعادلة

ذات الدرجة الثالثة

ومثل هذه الصعوبة كانت تأتي في المعادلة التي تزيد عن تلك المعادلة في

الدرجة لو حصل التوصل الى حلها بالقوانين المذكورة

وكان يلزم حينئذ أن يبحث عن الطرق التي يمكن بواسطتها حساب جذور معادلة

جبرية مكرراتها مبينة باعداد معلومة

ونتصدى لذكر النظريات العمومية التي قد بنيت عليها هذه الطرق فنقول

في تركيب تحليل الكميات الناتجة من دالة تامة للمتغير س

عند وضع س+ص بدل س

حينئذ لتكن $ج س^{م} + ب س^{م-1} + هـ س^{م-2} + \dots$

هي معادلة تامة مثلا

فاذا وضع س+ص بدل س آلت تلك الى

$$ج (س+ص)^{م} + ب (س+ص)^{م-1} + هـ (س+ص)^{م-2} + الخ$$

واذا حللت قوى الكمية ذات الحدين س+ص ورتبت بحسب الدرجات

المتنازلية للمتغير س تحصل

فقط وعلى المشتقة $\bar{ء}''$ اسم مشتقة $\bar{ء}''$ ن الخ ويقال ايضا للكمية $\bar{ء}''$ المشتقة الثانية وللكمية $\bar{ء}'''$ المشتقة من المرتبة الثالثة وهلم جرا

ومتى كانت دلالة مبينة بالرمز $د(س)$ كانت مشتقاتها المتوالية مبينة بالرموز $د'(س)$ ، $د''(س)$ ، $د'''(س)$ والخ وبمقتضى ذلك تؤول المعادلة السابقة الى

$$د(س+ص) = د(س) + د'(س) ص + د''(س) \frac{ص^2}{1\times2} + د'''(س) \frac{ص^3}{1\times2\times3} + الخ$$

وحيث أن اعلى أس الكمية $س$ ينقص عن اصله بواحد بالانتقال من كمية كثيرة الحدود معلومة الى مشتقتها الاولى أو من مشتقة الى التالية لها فيتكون من كمية كثيرة الحدود درجتها $م$ مشتقات متوالية عددها $م$ الأخيرة منها غير محتوية على $س$ ويشاهد بالسهولة انه اذا كان الحد الاول من الكمية الكثيرة الحدود مبينا كما سبق بالرمز $ج\ س^م$ كانت المشتقة الأخيرة أو المشتقة التي رتبتها $م$ مبينة هكذا

$$1\times2\times3 \cdots\cdots \times م \times ج$$

وبناء على ذلك يتحصل من قانون الحدود المركبة للدلالة $د(س+ص)$ المقدار $ج\ ص^م$ للحد الأخير وهذا هو المشاهد فيما تقدم اذ من البديهي بعد وضع $س+ص$ بدل $س$ في الكمية الكثيرة الحدود $ج\ س^م + ج_1\ س^{م-1} +$ الخ أنه يحدث من الكمية $ج\ (س+ص)^م$ الحد $ج\ ص^م$ وحينئذ لا يكون هناك حد يكون فيه أس $ص$ مساويا للأس $م$ أو أكبر من الأس $م$

بند ٤٢٦ ولتطبيق ما تقدم على مثال يتعلق باستعمال المشتقات نفرض الكمية الكثيرة الحدود

$$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٥} + ٥\,\text{س}^{٤} + \text{س}^{٣} - ١٦\,\text{س}^{٢} - ٢٠\,\text{س} - ١٦$$

فاذا اريد تحصيل الكمية التى تؤول اليها هذه الكمية الكثيرة الحدود عند وضع ص−١ بدل س فانه يلزم أن تحسب المشتقات المتوالية وحينئذ تكون المشتقة الاولى هى

$$\text{د}'(\text{س}) = ٥\,\text{س}^{٤} + ٢٠\,\text{س}^{٣} + ٣\,\text{س}^{٢} - ٣٢\,\text{س} - ٢٠$$

وبقسمة المشتقة الثانية على ٢ يتحصل

$$\frac{\text{د}''(\text{س})}{١\times٢} = ١٠\,\text{س}^{٣} + ٣٠\,\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} - ١٦$$

وبقسمة مشتقة هذه الدلالة الأخيرة على ٣ يتحصل

$$\frac{\text{د}'''(\text{س})}{١\times٢\times٣} = ١٠\,\text{س}^{٢} + ٢٠\,\text{س} + ١$$

وبقسمة مشتقة هذه على ٤ يتحصل

$$\frac{\text{د}''''(\text{س})}{١\times٢\times٣\times٤} = ٥\,\text{س} + ٥$$

ثم بقسمة مشتقة هذه على ٥ يتحصل

$$\frac{\text{د}'''''(\text{س})}{١\times٢\times٣\times٤\times٥} = ١$$

فاذا وضع فى هذه الدلالات المتنوعة −١ بدل س حدث

$\text{د}(-١) = -٩$ و $\text{د}'(-١) = ٠$ و $\frac{\text{د}''(-١)}{١\times٢} = ١$ و $\frac{\text{د}'''(-١)}{١\times٢\times٣} = -٩$ و $\frac{\text{د}''''(-١)}{١\times٢\times٣\times٤} = ٠$ و $\frac{\text{د}'''''(-١)}{١\times٢\times٣\times٤\times٥} =$

ومن هنا ينتج

$$د(ص-١) = ص^٤ - ٩ ص^٣ + ص^٢ - ٩$$

فاذا استعملت الطريقة المتقدمة في تحصيل الكمية التي تؤول اليها الكمية الكثيرة

الحدود $د س^٤ - د س^٣ + ٣ س - ١$ عندما يوضع فيها ص - ٥ بدل س

حدث $د ص^٤ - ١٦ ص^٣ + ٩٤ ص^٢ - ٢٤١ ص + ٥$

في المقادير التي تأخذها الدالة التامة للمتغير س عندما يفرض له مقادير كبيرة

أو صغيرة وفي التغيرات التي تطرأ على الدالة عندما يأخذ س

في التغير بالتوالي

بند ٤٢٧ في كثيرة الحدود $ج_١ س^م + ج_٢ س^د + ج_٣ س^ع + ح$ اذا كانت الأسس

م، د، ع، ح اعدادا صحيحة موجبة مكونة لمتسلسلة تنازلية وفرض

للمتغير س مقادير رقمية كبيرة وموجبة او سالبة كانت مقادير

كثيرة الحدود متحدة في العلامة مع مقادير الحد الأول $ج_١ س^م$ ويمكن

أن يفرض للمتغير س مقدار كبير بحيث يكون مقدار كثيرة الحدود كبيرا بقدر

ما يراد ولهذا توضع كثيرة الحدود المفروضة هكذا

$$ج_١ س^م \left(١ + \frac{ج_٢}{ج_١} \times \frac{١}{س^{م-د}} + \frac{ج_٣}{ج_١} \times \frac{١}{س^{م-ع}} + ح\right)$$

فاذا كان للمتغير س مقدار كبير جدا كانت مقادير الكسور $\frac{١}{س^{م-ع}}$ و ح

صغيرة جدا وبناء على ذلك تكون الحدود $\frac{ج_٢}{ج_١} \times \frac{١}{س^{م-د}}$ و $\frac{ج_٣}{ج_١} \times \frac{١}{س^{م-ع}}$ و ...

وبناءً عليه تكون موجبة وحينئذ يكون لكثيرة الحدود مقادير متحدة في العلامة مع مقادير الحد الأول جـ سٰ ويمكن زيادة على ذلك أن يكون لكثيرة الحدود مقدار صغير بقدر ما يراد لكون المضروب جـ سٰم يتناقص مع س الى غير نهاية

بند ٢٢٩ اذا علمت دلالة تامة كالدلالة د(س) ومقدار مخصوص كالمقدار ﻫ للمتغير س أمكن تحصيل كمية كالكمية ك صغيرة بقدر ما يراد بحيث يكون الفرق د(ﻫ + ك) − د(ﻫ) أقل من كمية معلومة صغيرة بقدر ما يراد ايضاً ولذا يشاهد (بمقتضى بند ٢٢٥) أن

$$\text{د}(\text{ﻫ}+\text{ك}) - \text{د}(\text{ﻫ}) = \text{د}'(\text{ﻫ})\,\text{ك} + \text{د}''(\text{ﻫ})\frac{\text{ك}^{٢}}{١\times٢} + \text{د}'''(\text{ﻫ})\frac{\text{ك}^{٣}}{١\times٢\times٣} + \text{الخ}$$

فاذا فرض الكمية ك مقدار صغير جداً كان لكل من الحدود دً(ﻫ)ك و $\text{د}''(\text{ﻫ})\frac{\text{ك}^{٢}}{١\times٢}$ و الخ مقدار صغير جداً وحيث أن عدد هذه الحدود محدود فيلزم أن تكون الكمية ك صغيرة جداً ليكون مجموع هذه الحدود صغيراً بقدر ما يراد وحينئذ يثبت المطلوب

تنبيه

اذا كان ل , ع عددين معلومين وكان ع أكبر من ل واريد تعيين الكمية ك بحيث يحصل بالنسبة لأي مقدار يفرض للمتغير س كالمقدار

الفرق بين كل مقدارين متواليين مساويًا $\frac{ط}{ع+ط}$ أو أصغر من هذا بحيث يحصل للدالة د (س) جملة مقادير الفرق فيها بين كل مقدارين متواليين منها أصغر من ط

في بعض نظريات يعلم بواسطتها ان كل معادلة لها جذر حقيقي وفي هذه النظرية وهي أن كل معادلة لها جذر

النظرية الاولى

يتبين اذا تحصل من العددين ل , ى الموضوعين في الطرف الأول من معادلة كالمعادلة د (س) = . ناتجان متخالفان في العلامة كانت للمعادلة بالأقل جذر حقيقي محصور بين ل , ى لانه يمكن بمقتضى ما تقدم في البند السابق أن تفرض للمتغير س مقادير لا تزال آخذة في الزيادة بالابتداء من ل الى ى بحيث تكون الفروق بين المقادير المطابقة للكمية د (س) كلها اقل من كمية كالكمية ط التى تؤخذ صغيرة بقدر ما يراد ولابد أنه يوجد بين مقادير د (س) مقداران متواليات

يكونان متخالفين فى العلامة لان المقدارين المتطرفين د (ل) ، د (ـــ)
مختلفان فى العلامة بالفرض وحيث أنه يوجد بين مقدارى الكمية
د (س) المتواليين المتخالفين فى العلامة فرق أصغر من الكمية ط فيكون
كل منهمـا أصغر من هـذه الكمية وحيث أنه لابد من وقوع ذلك
على أى وجه كان صِغَر الكمية ط فيؤخذ من ذلك أنه يوجد بين
ل ، ـــ بالأقل مقدار للمتغير س يكون الكمية د (س) مساوية للصفر

تنبـــيه

حيث انه يمكن أن الكمية الكثيرة الحدود د (س) تنتقل عدة مرات من الايجاب
الى السلب ومن السلب الى الايجاب عند ما يأخذ المجهول س فى التغير
من ل الى ـــ فلا مانع من انه يكون للمعادلة د (س) = ٠ عدة
جذور حقيقية محصورة بين ل ـــ

المنظرية الثانية

ينتج كل معادلة ذات درجة فردية لها بالأقل جذر حقيقى تخالف
العلامة مع حدها الأخير

مثلا لنفرض المعادلة

$$س^م + ح س^{م-١} + ء س^{م-٢} \ldots\ldots \pm ع = ٠$$

ويفرض فيها أن م كناية عن عدد فردى

فاذا لوحظت فى مبداء الأمر الحالة التى يكون فيها الحد الأخير سالباً وجعل

س = . فى الطرف الأول من المعادلة المذكورة كان الناتج سالباً لكونه

هو الحد الأخير واذا فرض للمتغير س مقدار كبير بحيث يكون الطرف الأول

متحداً فى العلامة مع حده الاول (كما فى بند ٢٢٧) كان الناتج موجباً وحينئذ يكون للمعادلة بالأقل جذر موجب

فاذا كان الحد الأخير موجباً وجعل س = . كان الناتج موجباً واذا فرض

للمتغير س مقدار سالب كبير بالكفاية كان الناتج سالباً وحينئذ يكون

للمعادلة بالأقل جذر سالب

النظرية الثالثة

بند ٢٢٩ كل معادلة ذات درجة زوجية حدها الأخير سالب يكون لها

بالأقل جذران حقيقيان احدهما موجب والآخر سالب

لانه اذا جعل فيها س = . كان الناتج سالباً واذا فرض للمتغير س مقدار

كبير موجب أو سالب كان هذا الناتج موجباً لانه متحد فى العلامة مع

الحد الأول الذى لا يزال موجباً لكونه مزدوج الدرجة

النظرية الرابعة

بند ٢٣٠ اذا كان الطرف الأول من معادلة مركباً من جملة حدود موجبة

متبوعة بعدة حدود اخرى سالبة (بفرض ان الطرف الثانى معدوم) فلا
يكون للمعادلة غير جذر واحد موجب فقط

مثلا لنفرض المعادلة

$$س^{م} + ح_{١} س^{م-١} + \dots\dots + ح_{ر} س^{م-ر} - ى س^{م-ر-١} - \dots\dots\dots\dots\dots ر = ٠$$

التى يرى فيها ان الحدود موجبة الى $ح_{ر} س^{م-ر}$ وأن جميع الحدود التالية
لها سالبة فحيث أن الحد الأخير من هذه المعادلة سالب فلا يكون
له جذر موجب لكنه يلزم ان يبرهن على انه لا يكون له غير جذر واحد
وحينئذ يمكن وضع الطرف الأول من المعادلة هكذا

$$س^{م-ر}\left(س^{ر} + ح س^{ر-١} \dots\dots + ح_{ر} - \frac{ى}{س} \dots\dots\dots\dots \frac{ر}{س^{م-ر}}\right)$$

فاذا اخذ المتغير س فى الازدياد بالابتداء من الصفر فان الكمية
$س^{ر} + ح س^{ر-١} \dots\dots + ح_{ر}$ لا تزال آخذة فى الزيادة التى تكون فيها ثابتة
وهذا لا يتأتى الا اذا كان الحد الأول من المعادلة موجبا دون غيره وأما
الكمية $\frac{ى}{س} + \dots\dots + \frac{ر}{س^{م-ر}}$ فانها لا تزال آخذة فى التناقص فاذاً
اذا بلغ المتغير س النهاية فى الزيادة فان علامة الطرف الأول من المعادلة
لا تتغير الا مرة واحدة واذاً لا يكون لهذه المعادلة غير جذر واحد موجب

النظرية الخامسة

بند ٣٢٥ أي معادلة لها جذر بوضع هكذا ا ح + ء $\sqrt{-1}$ وح و ء هما كميتان حقيقيتان

مثلاً اذا فرضت المعادلات الاربع

$س^م = +١$ و $س^م = -١$ و $س^م = +\sqrt{-1}$ و $س^م = -\sqrt{-1}$

شوهد أن المعادلة $س^م = +١$ لها جذر دائماً لأنها تتحقق مهما كان م بفرض س = ١ وأما المعادلات الثلاث الباقية فسيظهر أن الواحدة منها وهي $س^م = -١$ بالأقل لها جذر حقيقي أو تخيلي وأن كل واحدة من المعادلتين الآخريين وهما $س^م = +\sqrt{-1}$ و $س^م = -\sqrt{-1}$ يكون لها جذر تخيلي متى كان م دالاً على عدد بهذه الصورة $٤^ك$ وحيث أنه لم يبق علينا الآن نختبر في هاتين المعادلتين الاخيرتين الحالة التي يكون فيها م دالاً على عدد فردي او على حاصل ضرب عدد فردي في واحدة من قوى العدد ٢ فنقول ليكن م = $٤^ك$ × ح (بجعل ح رمز العدد فردي) فاذا جعل $س^{٤^ك} = ص$ تحصل من ذلك المعادلتان :

$ص^ح = +\sqrt{-1}$ و $ص^ح = -\sqrt{-1}$

وحيث أنه سيأتي في بند ٣٢٢ ان $(+\sqrt{-1})^{٤ك+١}$

أن يكون $ح = ٠$ و $ك = ٠$ أو $ح^٢ + ك^٢ = ٠$ ولنتصدى للبرهنة على

أنه يوجد دائماً لكل من ح و ك مقداران حقيقيان بحيث يتحقق

هذا الشرط وهو أن $ح^٢ + ك^٢ = ٠$ ونثبت في مبدأ الأمر أن أصغر مقدار

جزر للجملة $ح^٢ + ك^٢$ عند تغيير كل من ح و ك يكون مطابقاً

لمقدارين محدودين من مقادير ح و ك ثم نبرهن على أن هذا المقدار لا يكون

الاصفراً (ولا يخفى أن الجملة $\sqrt{ح^٢ + ك^٢}$ هي المعروفة كما سبق بقياس المقدار

التخيلي $ح + ك\sqrt{-١}$) فنقول

انه يلزم للبرهنة على أن أصغر مقدار للقياس $\sqrt{ح^٢ + ك^٢}$ يكون مطابقاً

لمقدارين محدودين من مقادير ح و ك أن نثبت انه اذا اخذت الكميات

ح و ك أو إحداهما في الزيادة الى غير نهاية أخذ القياس $\sqrt{ح^٢ + ك^٢}$

في الزيادة الى غير نهاية كذلك ولذا يكتب الطرف الأول من المعادلة هكذا

$$س^م \left(١ + \frac{ح_١}{س} + \frac{ح_٢}{س^٢} + \dots + \frac{ح_م}{س^م}\right)$$

ثم نجعل $س = ع + ك\sqrt{-١}$ فيحدث

$$ن + ج\sqrt{-١} = (ع + ك\sqrt{-١})^م \left[١ + \frac{ح_١}{ع + ك\sqrt{-١}} + \frac{ح_٢}{(ع + ك\sqrt{-١})^٢} + \dots + \frac{ح_م}{(ع + ك\sqrt{-١})^م}\right]$$

وسبق في بندي ٢٢٦ و ٢٣٣ ان قياس حاصل ضرب عدة مقادير تخيلية هو حاصل

ضرب

معدا ريختلف عن الصفر امكن ان يفرض للمتغير س مقدار تخيلي بحيث اذا رمز للناتج بعد وضع هذا المقدار في الطرف الأول من المعادلة بالكمية

ع + ك $\sqrt{-1}$ حدث ع + ك ز ع + ك

ولنرمز للمتغير س المطلوب بالكمية ع + ك $\sqrt{-1}$ + و ى ونجعل هـ رمزا لعدد صغير بقدر ما يراد و ى رمزا غير معين تفرض له مقادير حقيقية أو تخيلية فلتحصيل الناتج من وضع ع + ك $\sqrt{-1}$ + هـ و بدل المتغير س في الطرف الاول من المعادلة (١) يستعوض في مبداء الأمر المتغير س بالكمية س + ر ثم يجعل س = ع + ك $\sqrt{-1}$, ر = هـ و

ويمكن بيان الناتج المتحصل من وضع س + ر بدل س في الطرف الاول من المعادلة بالقانون

ب + ب' ر + $\frac{ب''}{١×٢}$ ر٢ + $\frac{ب'''}{١×٢×٣}$ ر٣ + ... + ر م .... (٢)

بجعل ب رمزا للطرف الاول من المعادلة و ب' و ب'' و ب''' الخ رموزا للمشتقات المتوالية لكثيرة الحدود المذكورة

فاذا جعل س = ع + ك $\sqrt{-1}$ في كثيرة الحدود (٢) آل الحد الأول الذي هو ب الى ع + ك $\sqrt{-1}$ وامكورات قوى الحد ر في الحدود التالية له قد يكون بعضها معدوما إلا انها لا تنعدم جميعا دفعة واحدة لانه لو كان اعلى قوة للحد ر هو الواحد

وإذا جعل $ر$ رمزاً لا دنى قوة للحد $ر$ الذي كون لا يؤول الى الصفر عند جعل $س = ج + ك\sqrt{-1}$ بل أنه يوضع بهذه الصورة وهي $ر_1 + ف\sqrt{-1}$ فلا يكون $ر_1 = ٠$ و $ف = ٠$ في آنٍ واحد

وبمقتضى ذلك اذا جعل $ج' + ك'\sqrt{-1}$ رمزاً للمقدار الذي نأخذه الكثيرة الحدود (٢) عند ما يوضع فيها $ج + ك\sqrt{-1}$ بدل $س$ و $هـ و$ بدل $ر$ حدث

$$ج' + ك'_1\sqrt{-1} = ج + ك_1\sqrt{-1} + (ر_1 + ف_1\sqrt{-1})\, هـ^ر و^ر \ldots\ldots$$

+ (الحدود المشتملة على $هـ^{ر+1}$ و $هـ^{ر+2}$ و ..... و $هـ^م$)

ويمكن ان يفرض لغير المعين و مقدار بحيث يكون $و^ر = +1$ أو $و^ر = -1$ فيحدث $ج' + ك'_1\sqrt{-1} = ج + ك_1\sqrt{-1} \pm (ر_1 + ف\sqrt{-1})\, هـ^ر +$ (الحدود المشتملة على $هـ^{ر+1}$ و $هـ^{ر+2}$ و ..... و $هـ^م$)

وبانفصال الاجزاء الحقيقية من الاجزاء التخيلية يحدث

$ج' = ج \pm ر_1\, هـ^ر +$ (الحدود المشتملة على $هـ^{ر+1}$ و $هـ^{ر+2}$ و ...... و $هـ^م$) و

$ك'_1 = ك_1 \pm ف\, هـ^ر +$ (الحدود المشتملة على $هـ^{ر+1}$ و $هـ^{ر+2}$ و ...... و $هـ^م$)

ومن هنا يؤخذ

$ج'^2 + ك'^2_1 = ج^2 + ك^2_1 \pm 2(ج ر_1 + ك_1 ف)\, هـ^ر +$ (الحدود الحقيقية المشتملة على $هـ^{ر+1}$ و $هـ^{ر+2}$ و ... $هـ^{2م}$)

ويمكن أن يفرض للعدد هـ مقدار صغير بالكفاية بحيث يكون مجموع الحدود المشتملة على قوى هـ في مقدار ع′^٢ + ك′^٢ متحدًا في العلامة مع الحد ± ٢ (ع ر + ك ف) هـ^ن (كما تقدم في بند ٢٢٧) ويمكن زيادة على ذلك أن يكون هذا الحد سالبًا لانه يكفي لذلك تعيين غير المعين و على وجه بحيث يكون و^ن مساويًا + ١ أو − ١ بحسب ما تكون الكمية ع ر + ك ف سالبة أو موجبة فإذا تحققت جميع هذه الشروط تحصل

ع′^٢ + ك′^٢ < ع^٢ + ك^٢ ومنها ينتج √(ع′^٢ + ك′^٢) < √(ع^٢ + ك^٢)

وحيث فرض أن الكمية ع ر + ك ف ليست معدومة فيلزم ايضًا اختبار الحالة التي تكون فيها الكمية ع ر + ك ف = ٠ وذلك بأن يفرض لغير المعين في المعادلة (٣) عوضًا عن أن يجعل فيها و^ن = ± ١ مقدار به يكون و^ن = ± √−١ وحينئذ ينتج أن ع′ + ك′ √−١ = ع + ك √−١ ± √−١ (ر + ف √−١) هـ^ن + الخ ومن هنا يحدث

ع′ = ع ∓ ف هـ^ن + الخ ، ك′ = ك ± ر هـ^ن + الخ

وبناء على ذلك يحصل

ع′^٢ + ك′^٢ = ع^٢ + ك^٢ ± ٢ (ك ر − ع ف) هـ^ن + الخ

وحينئذ يرى ان الحدود التالية للحد هـ^ن حقيقية ومحتوية على قوى

للحد هـ بأس يزيد عن ح

وحيث انه قد فرض أن ج ر + ك ف = ٠ فلا يخص غير ك ر - ج ف = ٠

لانه ان كانت كلتا المتساويتين تساوى صفراً حدث

$(ج ر + ك ف)^2 + (ك ر - ج ف)^2 = ٠$ أو $(ج^2 + ك^2)(ر^2 + ف^2) = ٠$

وبناء عليه يكون $ج^2 + ك^2 = ٠$ أعنى ج = ٠ و ك = ٠ أو $ر^2 + ف^2 = ٠$

أى ر = ٠ و ف = ٠ وهذا مخالف للفروض المتقدمة

ولما كانت الكمية ك ر - ج ف ليست معدومة أمكن فرض العدد هـ

صغيراً بالكفاية ليكون مجموع الحدود المشتملة على قوى الحد هـ فى مقدار

$ج^2 + ك^2$ متحداً فى [illegible] مع الحد الأول الذى هو

$\pm ٢ (ك ر - ج ف) هـ^م$ ويمكن ايضاً ان يكون هذا الحد سالباً لانه يكفى

لذلك أن يعين و على وجه بحيث يكون $و^م = + \sqrt{-١}$ أو $- \sqrt{-١}$

بحسب ما تكون الكمية ك ر - ج ف سالبة أو موجبة فاذا تحققت

جميع هذه الشروط فانه يحدث

$$\sqrt{ج'^2 + ك'^2} < \sqrt{ج^2 + ك^2}$$

في مضارب المعادلات وقواسمها

النظرية السادسة

بند ٢٣٦ اذا كان ح هو الجذر الحقيقي لمعادلة كالمعادلة ب = ٠ فان الطرف الاول من المعادلة يكون قابلاً للقسمة على الكمية ذات الحدين س - ح ولذا نقسم الكمية الكثيرة الحدود ب على س - ح وحيث أن المقسوم عليه يحتوي على س بدرجة اولى فقط فيتوصل بالعمل الى باقٍ لا يحتوي على هذا المتغير ولا يكون مقام خارج القسمة محتويًا على المتغير س المذكور فاذا رمز لخارج القسمة بالرمز خ وللباقي بالرمز ق حدث

ب = (س - ح) × خ + ق

وفي هذه المتساوية اذا جعل س = ح انعدم طرفها الأول وحيث أنه قد فرض أن ح هو جذر المعادلة ب = ٠ فينعدم حاصل الضرب (س - ح) خ أيضًا لان المضروب س - ح قد آل الى الصفر ولا يمكن أن يكون المضروب خ غير معدوم وأما الباقي ق فانه لم يتغير لانه ليس داخلاً في س فاذاً يكون هذا الباقي معدومًا واذاً تكون الكمية ب الكثيرة الحدود قابلة للقسمة على س - ح

م. ط

تنبيه أول

إذا كانت الكمية ذات الحدين س - ه تقسم الكمية الكبيرة الحدود ص كان ه جذراً للمعادلة ص = ٠ لأنه قد فرض أن ص = (س - ه) خ حيث خ الخارج وهو تام بالنسبة إلى س فإذا جعل في هذه المساواة س = ه فالطرف الثاني ينعدم وحينئذ يؤول الطرف الأول إلى الصفر

التنبيه الثاني

وإذا جعل س = ه في طرفي المساواة ص = (س - ه) خ + ق فإنه يحصل (س - ه) خ يؤول إلى الصفر والباقي ق لا يتغير على أي وجه بل مقداره كما هو ومن هنا يؤخذ أن الباقي ق يكون مساوياً للمقدار الذي تصير إليه الكمية الكبيرة الحدود ص عندما يوضع فيها ه بدل س ولا يخفى أن هذه قضية تشتمل على النظرية السادسة لأنه إذا كان ه هو جذر للمعادلة ص = ٠ كان الناتج من وضع ه بدل س في ص صفراً وحينئذ يكون باقي قسمة ص على س - ه صفراً أيضاً وبناء على ذلك تكون الكمية الكبيرة الحدود ص قابلة للقسمة على س - ه

وقد برهن مهندس لاجرانج على النظرية السادسة المذكورة بهذه البرهنة

وهى اذا فرض أن المعادلة العمومية هى

$$(١)\quad س^{م} + ج_{١} س^{م-١} + ج_{٢} س^{م-٢} + \cdots\cdots + ج_{م-١} س + ج_{م} = ٠$$

وكان ح هو الجذر لهذه المعادلة تحصل من ذلك المتساوية

$$ح^{م} + ج_{١} ح^{م-١} + ج_{٢} ح^{م-٢} + \cdots\cdots + ج_{م-١} ح + ج_{م} = ٠$$

فاذا استخرج من هذه المتساوية مقدار $ج_{م}$ ووضع فى الطرف الأول من المعادلة (١) آلت كثيرة الحدود المفروضة الى

$$س^{م} + ج_{١} س^{م-١} + ج_{٢} س^{م-٢} + \cdots\cdots + ج_{م-١} س$$
$$- ح^{م} - ج_{١} ح^{م-١} - ج_{٢} ح^{م-٢} - \cdots\cdots - ج_{م-١} ح \quad أو$$
$$س^{م} - ح^{م} + ج_{١}(س^{م-١} - ح^{م-١}) + ج_{٢}(س^{م-٢} - ح^{م-٢}) \cdots\cdots + ج_{م-١}(س - ح)$$

لكن حيث أن $س - ح$ يقسم كلا من الكميات $س^{م} - ح^{م}$ و $س^{م-١} - ح^{م-١}$ و لخ

فيكون الطرف الأول من المعادلة (١) قابلاً للقسمة على $س - ح$ ايضاً

$\frac{...}{٢٨٢}$ ويكفى لتحصيل خارج القسمة أن تقسم كل من الكميات ذات الحدين

$س^{م} - ح^{م}$ و $س^{م-١} - ح^{م-١}$ و لخ على $س - ح$ وأن تجمع الخوارج الجزئية

على بعضها بضرب خارج القسمة الجزئى الثانى فى $ج$ والثالث فى $ج_{٢}$

و لخ فيتحصل

$\text{س}^{\text{م}-1} + \text{ح}$	$\text{س}^{\text{م}-2} + \text{ح}^{2}$	$\text{س}^{\text{م}-3} + \text{ح}^{3}$	$\text{س}^{\text{م}-4} \ldots + \text{ح}^{\text{م}-1}$
$+\text{ج}_{1}$	$+\text{ج}_{1}\,\text{ح}$	$+\text{ج}_{1}\,\text{ح}^{2}$	$\ldots + \text{ج}_{1}\,\text{ح}^{\text{م}-2}$
	$+\text{ج}_{2}$	$+\text{ج}_{2}\,\text{ح}$	$\ldots + \text{ج}_{2}\,\text{ح}^{\text{م}-3}$
		$+\text{ج}_{3}$	$\ldots + \text{ج}_{3}\,\text{ح}^{\text{م}-4}$
			$\ldots + \ldots\ldots$
			$\ldots + \ldots\ldots$
			$+\text{ج}_{\text{م}-1}$

ومن هنا يثبت ان مكرر كل حد من خارج القسمة يتحصل بالابتداء من الحد الثاني بان يضرب مكرر الحد السابق عليه في ح ويضاف الى حاصل الضرب المكرر الذي يشغل في كثيرة الحدود $\text{س}^{\text{م}} + \text{ج}_{1}\,\text{س}^{\text{م}-1} + \ldots$ مرتبة الحد الذي يراد تحصيله من خارج القسمة ومكرر الحد الاول من خارج القسمة لا يختلف عن مكرر الحد الاول من كثيرة الحدود المفروضة

سند ٢٣٨ ويمكن ايضاً ان ينبه مهما كانت الكمية ح على ان الطرف الاول من المعادلة (١) يكون دائماً مكافئاً للمقدار

$$\text{س}^{\text{م}} - \text{ح}^{\text{م}} + \text{ج}_{1}(\text{س}^{\text{م}-1} - \text{ح}^{\text{م}-1}) + \text{ج}_{2}(\text{س}^{\text{م}-2} - \text{ح}^{\text{م}-2}) \ldots + \text{ج}_{\text{م}-1}(\text{س} - \text{ح})$$
$$+ \text{ح}^{\text{م}} \quad + \text{ج}_{1}\,\text{ح}^{\text{م}-1} \quad + \text{ج}_{2}\,\text{ح}^{\text{م}-2} \ldots + \text{ج}_{\text{م}-1}\,\text{ح} + \text{ج}_{\text{م}}$$

وحيث أن هذا المقدار الأخير مكون من جزئين أحدهما قابل للقسمة على $س - ح$ والثانى غير محتو على $س$ فيكون هذا الجزء الثانى كناية عن باقى قسمة الكمية الكثيرة الحدود المفروضة على $س - ح$ وحينئذ فقد آلت هذه النتيجة الى المتقدمة فى النتيجة الثانية وبالجملة فيمكن هنا ايراد القواعد المقررة فى البنود الثلاثة السابقة وذلك بأن تجرى بمقتضى الطرق المعتادة عملية قسمة الكمية الكثيرة الحدود $س^م + ج_١ س^{م-١} + ج_٢ س^{م-٢} + \ldots$ على الكمية ذات الحدين $س - ح$

النظرية السابعة

بند ٣٩٠ أى معادلة ذات درجة جبرية لها دائما جذر حقيقية أو تخيلية لا تزيد عن درجتها الجبرية مثلا اذا فرضت المعادلة $ب_م = ٠$ شوهد أن لها بالضرورة جذرا حقيقيا أو تخيليا فاذا رمز اليه بالرمز $ج$ كان الطرف الأول قابلا للقسمة على $س - ح$ والخارج كمية كثيرة الحدود درجتها $م - ١$ وحينئذ يكون

$$ب_م = (س - ح)(س^{م-١} + \ldots)$$

فاذا جعلت الكمية الكثيرة $س^{م-١} + \ldots$ مساوية للصفر فانه يحصل

من

من ذلك معادلة يكون لها جذر كالجذر د وحينئذ تكون الكمية الكثيرة الحدود قابلة للقسمة على س - د ويكون الخارج كمية كثيرة الحدود درجتها م - ٢ وبناء على ذلك يحدث

$$ص = (س - ح)(س - د)(أ س^{م-٢} + ...)$$

فاذا جعلت الكمية الكثيرة الحدود أ س^{م-٢} + ... مساوية للصفر فانه يحصل من ذلك معادلة يكون لها جذر كالجذر هـ وحينئذ تكون الكمية الكثيرة الحدود المذكورة قابلة للقسمة على س - هـ ويكون خارج القسمة كمية كثيرة الحدود درجتها م - ٣ وبناء على ذلك يكون

$$(س - ح)(س - د)(س - هـ)(أ س^{م-٣} + ...)$$

ويمكن أن يتوالى العمل هكذا حتى لا يكون الخارج محتويا على المتغير س الا بدرجة اولى ويكون كمية ذات حدين كالكمية س - ك وحينئذ تتحلل الكمية الكثيرة الحدود المفروضة الى مضاريب بدرجة اولى عددها م وبناء على ذلك يحدث

$$ص = (س - ح)(س - د)(س - هـ) ... (س - ك)$$

وبمقتضى هذا التحليل نشاهد أن الكمية الكثيرة الحدود ص تؤول الى الصفر اذا وضع فيها بدل المتغير س واحد من المقادير ح، د، هـ ... ، ك

التي عددها م وبناء على ذلك يكون للمعادلة ص = ٠ جذور عددها م

ولا يكون لها جذور غير الجذور ح , ء , هـ , ... ك التي عددها م

لانه ان كان لها غير هذه الجذور أمكن تحليل الكمية الكثيرة الحدود ص

الى جمل من المضاريب التي بدرجة اولى وهذا محال (كما في بند ٤١٧)

ويمكن أن تكون بعض المضاريب س - ح , س - ء , س - هـ , الخ متساوية

وفي هذه الحالة تكون جذور المعادلة ص = ٠ متساوية مثلاً اذا كانت

الكمية الكثيرة ص محتوية على ثلاثة مضاريب كل واحد منها يساوي

س - ح فان كل واحد من جذورها الثلاثة يكون مساويًا للمضروب

ح ولذا يقال ان أي كمية درجتها م يكون لها جذور عددها م

بند ويمكن البرهنة بقطع النظر عن النظرية المتقدمة (في بند ٤١٧) على

ان أي معادلة بدرجة م لا يكون لها جملة واحدة من الجذور عددها م

مثلاً لنفرض المتساوية

$$ص = (س - ح)(س - ء)(س - هـ) .... (س - ك)$$

فاذا فرض فيها للمتغير س مقدار كالمقدار ل مختلف عن كل واحدة

من الكميات ح , ء , هـ , ... ك يقال حيث انه لا ينعدم أي مضروب

من مضاريب الطرف الثاني فلا ينعدم حاصل ضرب هذه المضاريب

وحينئذ

وحينئذ لايكون ل جذراً للمعادلة $ب_١$ س = ٠ فان وجد لها جذر مساوية

بحيث يكون $ب_١$ س = (س − ح)^م (س − ى)^ع ك فلا تكون الكمية الكثيرة

الحدود $ب_١$ س مساوية لأى حاصل ضرب مكون من مضاريب واحدة

ذات أس متنوعة لانه ان أمكن ذلك بفرض أن

$$(س − ح)^م (س − ى)^ع ك = (س − ح)^{م'} (س − ح)^{ع'} ك'$$

وكان م > م' فبقسمة الطرفين على (س − ح)$^{م'}$ يحدث

$$(س − ح)^{م−م'} (س − ى)^ع ك = (س − ى)^{ع'} ك'$$

وحينئذ يؤول الطرف الأول من المتساوية الأخيرة الى الصفر بمقتضى

الفرض س = ح ولا يتأتى ذلك فى الطرف الثانى لان كلاً من مضاريبه

مختلف عن س − ح وحينئذ تكون المتساوية غير ممكنة

وبناءً على ذلك لايكون لأى معادلة درجتها م غير جملة واحدة من

جذور عددها م متساوية أو غير متساوية

٢٤١ فاذا جعل $ب_١$ س رمزاً لدلالة تامة للكمية س التى درجتها م

وُفِّق بين مضاريب الدرجة الأولى من هذه الدلالة بضربها فى

بعضها مثنى وثلاث فان حواصل الضرب المتحصلة من ذلك تكون

كلها قاسمة للدلالة $ب_١$ ويشاهد بمقتضى النظرية الثانية المقررة

(نتيجة) أن الكمية الكثيرة الحدود تنقسم على القواسم الثلاثية من عدد التوافيق وحينئذ يكون عدد قواسم الدرجة الثانية $\frac{م(م-١)}{١×٢}$
وعدد قواسم الدرجة الثالثة $\frac{م(م-١)(م-٢)}{١×٢×٣}$ وهلم جرا

النظرية الثامنة

(نظرية) اذا كان للمعادلة حقيقية المكورات جذر تخيلي كالجذر ل + ك $\sqrt{-١}$
فانه يكون لها أيضا جذر كالجذر ل − ك $\sqrt{-١}$

فاذا وضع ل + ك $\sqrt{-١}$ بدل س في الطرف الأول من هذه المعادلة
فان الحدود المحتوية على الكمية ك $\sqrt{-١}$ المرفوعة الى قوة زوجية تكون
مجردة عن الدلالة التخيلية $\sqrt{-١}$ وهذه الدلالة تكون باقية على حالها
في سائر الحدود المحتوية على الكمية ك $\sqrt{-١}$ المرفوعة الى قوة فردية
بحيث اذا رمز للناتج بعد الوضع بالرمز ع + ك $\sqrt{-١}$ كانت ع و ك
كميتين حقيقيتين والكمية ع محتوية على قوى زوجية فقط للكمية
ك والكمية ك على قوى فردية للكمية ك المذكورة

فاذا وضع في المعادلة المذكورة ل − ك $\sqrt{-١}$ بدل س فان الناتج
المتحصل لا يختلف عن المتقدم الا باختلاف علامات القوى الفردية
للكمية ك وحينئذ يوضع الناتج المذكور هكذا ع − ك $\sqrt{-١}$

حقيقى بدرجة اولى (كمافى بند ٣٤٢) وبقسمتها على هذا المضروب نؤول الى معادلة زوجية الدرجة .

فى الارتباطات الواقعة بين مكررات المعادلة وجذورها

النظرية التاسعة

بند ٣٤٣ حيث أنّ مكرر اعلى قوة للمجهول هو الواحد فى المعادلة المحولة الى الصورة

$$\text{س}^{\text{م}} + \text{ج}_{١}\,\text{س}^{\text{م}-١} + \text{ء}_{١}\,\text{س}^{\text{م}-٢} + \text{هـ}_{١}\,\text{س}^{\text{م}-٣} + \cdots + \text{ك}_{١} = ٠$$

فيكون مكرر الحد الثانى المأخوذ بعلامة مخالفة لعلامته مساويًا لمجموع الجذور ومكرر الحد الثالث مساويًا لمجموع حواصل ضرب الجذور مأخوذةً مثنى ومكرر الحد الرابع المأخوذ بعلامة مخالفة لعلامته مساويًا لمجموع حواصل ضرب الجذور مأخوذةً ثلاث ثلاث ومكرر الحد الأخير المأخوذ بعلامته ان كانت درجة المعادلة زوجية وبعلامة مخالفة لعلامته ان كانت درجتها فردية مساويًا لحاصل ضرب جميع الجذور

مثلًا اذا جعلت ج , ء , هـ ,.... , ك رموز الجذور معادلة عددها م فيكون طرفها الأول مساويًا لحاصل الضرب

$$(\text{س}-\text{ج})(\text{س}-\text{ء})(\text{س}-\text{هـ})\cdots\cdots(\text{س}-\text{ك})$$

وحيث

وحيث تقدم أن حاصل الضرب المحتوي على مضاريب عددها م كالمضاريب
س+ح ، س+د ، س+هـ ، الخ يكون فيه مكرر $س^{م-1}$ هو مجموع كميات .
ح ، د ، هـ ، الخ ومكرر $س^{م-2}$ هو مجموع حواصل ضرب هذه الكميات مأخوذة
مثنى ومكرر $س^{م-3}$ هو مجموع حواصل ضرب هذه الكميات مأخوذة ثلاث
وهكذا الى مكرر الحد الأخير الذي يكون مساويا لحاصل ضرب سائر هذه
الكميات فيكفي للانتقال من حاصل ضرب المضاريب س+ح ، س+د ، الخ
الى حاصل ضرب المضاريب س−ح ، س−د ، الخ أن تغير علامات الكميات
ح ، د ، هـ ، الخ فتتغير علامات الحواصل المحتوية على هذه الكميات الداخلة
فيها بعدد فردي وتبقى الحواصل المحتوية عليها بعدد زوجي بعلاماتها .
وحينئذ يثبت المطلوب وهذه الارتباطات التي عددها كدرجة المعادلة لا يمكن
أن تستخرج منها جذور هذه المعادلة لانه يتوصل بواسطة حذف الجذور واحدا بعد واحد
الى معادلة لا تختلف عن المعادلة المفروضة الا بكون احد الجذور داخلا فيها بدل س ولنفرض المعادلة ذات الدرجة الثالثة

$$س^{3} + ج_{1} س^{2} + ج_{2} س + ج_{3} = 0$$

فاذا جعلت ح ، د ، هـ رموزا للجذور الثلاثة فانه يحصل بمقتضى
النظرية السابقة المعادلات الثلاث

$$-ح-د-هـ = ج_{1} ، ح د + ح هـ + د هـ = ج_{2} ، -ح د هـ = ج_{3}$$

فى أسهل طريقة تستعمل فى حذف ء ، هـ من بين هذه المعادلات هى أنها
تجمع على بعضها بعد أن تضرب المعادلة الاولى فى $ح^{٢}$ والثانية فى ح
فتحصل من ذلك المعادلة

$$ح^{٣} + ج_{١} ح^{٢} + ب_{١} ح + هـ_{١} = ٠$$

وهذه المعادلة لا تختلف عن المعادلة المتقدمة الا بوضع ح بدل س
وحينئذ يؤخذ من التوضيحات السابقة أنه يتوصل دائماً الى معادلة لا تختلف
عن المعادلة المفروضة على اى وجه كانت طريقة الحذف

فى تحويل المعادلات

يفيد من المفيد فى الغالب لسهولة تعيين جذور معادلة ان تجرى على
هذه المعادلة بعض تحويلات الغرض منها أن تضاف الى كل من جذور
معادلة أو تطرح منها كمية أو تضرب فى كمية أو تقسم عليها
مثلاً اذا فرضت المعادلة

$$س^{م} + ج_{١} س^{م-١} + ب_{١} س^{م-٢} + ... + ك_{١} = ٠ \quad ..... (١)$$

فلتحويل هذه المعادلة الى اخرى تكون جذورها مساوية لجذور هذه
المعادلة مضافاً اليها كمية نفرض أن

$$ص = س + د \quad فيكون \quad س = ص - د$$

ويوضع

وبوضع ص - ر بدل س في المعادلة (١) تحصل المعادلة المطلوبة لانه يحدث بعد الاستبدال

(ص - ر)^م + ج (ص - ر)^(م-١) + ء (ص - ر)^(م-٢) + ... + ك = ٠ ...... (٢)

وهذه المعادلة تحقق بالشرط المفروض لان الناتج الحادث من وضع حـ بدل س في المعادلة (١) لا يختلف عن الناتج الحادث من وضع حـ + ر بدل ص في المعادلة (٢) وبناءً على ذلك اذا كان حـ جذراً من جذور المعادلة الاولى كان حـ + ر جذراً من جذور المعادلة الثانية

ويمكن ايضاً التوصل الى هذا الناتج بواسطة وضع الطرف الأول من المعادلة على صورة حاصل ضرب مضاريب بدرجة اولى لانه اذا فرض أن حـ , ء , هـ , ... ك هي الجذور كان الطرف الأول المذكور مكافئاً لحاصل الضرب

(س - حـ) (س - ء) (س - هـ) .... (س - ك)

فاذا وضع ص - ر بدل س فان هذا الحاصل يتحول الى

[ص - (حـ + ر)] [ص - (ء + ر)] [ص - (هـ + ر)] .... [ص - (ك + ر)]

وحينئذ تكون جذور المعادلة المحولة بعد الاستبدال هي حـ + ر , ء + ر , ...

ـيد ثمّ اذا اريد تنقيص جميع جذور المعادلة (١) بكمية واحدة فان ذلك لا يختلف عما نحن بصدده الا بشئ واحد وهو أن ر تكون كمية سالبة وحينئذ اذا وضعت هذه الكمية بالصورة ـ ر آلت المعادلة المذكورة بعد التحويل الى

$$(ص+ر)^م + ج_١(ص+ر)^{م-١} + ء_١(ص+ر)^{م-٢} + \cdots + ك_١ = \cdots\cdots (٣)$$

وهذا التحويل يستعمل في تغيير معادلة بأخرى لا تكون محتوية على قوة معينة للمجهول وبتحليل القوى المتنوعة للكمية ذات الحدين ص + ر في المعادلة (٣) تؤول هذه المعادلة الى

$$ص^م \left| \begin{matrix} + م ر \\ + ج_١ \end{matrix} \right| ص^{م-١} \left| \begin{matrix} + \frac{م(م-١)}{٢} ر^٢ \\ + (م-١) ج_١ ر \\ + ء_١ \end{matrix} \right| ص^{م-٢} + \cdots + \left\{ \begin{matrix} ر^م \\ + ج_١ ر^{م-١} \\ + ء_١ ر^{م-٢} \\ + \\ \vdots \\ ك_١ \end{matrix} \right\} = ٠$$

واذا اريد جعل هذه الكمية غير محتوية على القوة م ـ ١ للمتغير ص فانه يلزم أن يكتب $م ر + ج_١ = ٠$ ومن هنا ينتج $ر = -\frac{ج_١}{م}$

وحينئذ يؤول القانون س = ص + ر الى

س =

$$س = ص - \frac{ج}{م}$$

وعلى ذلك يلزم لتحويل معادلة الى اخرى تنقص عنها بالحد الثانى أن يوضع بدل المجهول س مجهول آخر ص يضاف اليه المكرر ج من الحد الثانى فى المعادلة المفروضة مأخوذاً بعلامة مخالفة لعلامته ومقسوماً على درجة المعادلة فتكون جذور المعادلة المحولة مساوية لجذور المعادلة المفروضة مضافاً اليها $\frac{ج}{م}$

ويسهل بواسطة الخواص المعروفة فى شأن تركيب المكررات مع الجذور توضيح القاعدة السابقة لانه اذا الجذور واذا اضيف اليها $\frac{ج}{م}$ زاد مجموعها بمقدار $م \times \frac{ج}{م}$ أى بمقدار ج وحيث أن هذا المجموع كان يساوى فى مبدأ الأمر -ج فيكون مجموع جذور المعادلة الجديدة مساوياً للصفر وبناء على ذلك يكون مكرر الحد الثانى معدوماً

واذا اريد حذف الحد الثالث من المعادلة (٤) يجعل مكونه مساوياً للصفر فتتكون من ذلك معادلة بدرجة ثانية يؤخذ منها مقدار ان للكمية ر واذا حذف الحد الرابع تحصلت من ذلك معادلة بدرجة ثالثة وهكذا واذا حذف الحد الأخير كانت المعادلة التى يطلب حلها شابهة للمعادلة المفروضة

وهذا واضح لانه متى انعدم الحد الأخير من المعادلة (٤) كان أحد جذور

هذه المعادلة مساويًا للصفر وحيث أن هذه الجذور هي عين جذور المعادلة

المفروضة مطروحًا من كل واحد منها ر فلكي ينعدم أحدها يلزم ان تكون

الكمية ر المذكورة جذرًا من جذور المعادلة المفروضة

سند ٢٤٦ ولنمثل لحذف الحد الثاني بمثال هو لنفرض المعادلة

$$س^٥ + ٥ س^٤ + س^٣ - ١٦ س^٢ - ٢٠ س - ١٦ = ٠ \quad \ldots\ldots (٥)$$

ثم يوضع فيها ص - ١ بدل س فتتحول الى المعادلة

$$ص^٥ - ٩ ص^٣ + ص^٢ - ٩ = ٠$$

وهذه المعادلة يمكن وضعها بالصورة

$$(ص^٢ - ٩)(ص^٣ + ١) = ٠$$

وحينئذ يشاهد انها قد انقسمت الى جزئين هما

$$ص^٢ - ٩ = ٠ \quad و \quad ص^٣ + ١ = ٠$$

فأما الجزء الأول فيتحصل منه ص = + ٣ و ص = - ٣ وأما الثاني

فيحدث منه بمقتضى ما تقدم في (سند ١٥٤)

$$ص = - ١ \quad و \quad ص = \frac{١}{٢}(١ + \sqrt{-٣}) \quad و \quad ص = \frac{١}{٢}(١ - \sqrt{-٣})$$

ومن هنا يؤخذ أنه يكون للمعادلة (٥) ثلاثة جذور اثنان منها تخيليان

فان كان م دالأعلى عدد زوجى فانه يترتب على وضع – ص بدل س تغيير علامات سائر الحدود الزوجية المرتبة بالابتداء من الحد الأول أما الحدود الفردية المرتبة فلا تتغير علاماتها وان كان م دالأعلى عدد فردى فانه يترتب على ذلك تغيير علامات الحدود الفردية المرتبة أما الحدود الزوجية فلا تتغير علاماتها وحينئذ يلزم لكى يكون الحد الأول موجبًا ان تغير علامات سائر الحدود فى المعادلة الناتجة وينتج من ذلك أن تغيير علامات جذور معادلة بعد ان توضع فيها لتصير تامة الحدود والناقصة منها ويجعل الصفر مكررًا لكل واحد من هذه الحدود لا يحصل الا بتغيير علامات الحدود الزوجية المرتبة فقط

٤٦٩ – اذا كانت جميع حدود المعادلة المحولة الى الصورة الاعتيادية متحدة فى العلامة فلا تكون محتوية على جذر موجب لانه يحدث من وضع مقدار موجب بدل س فى الطرف الأول من المعادلة جملة من الكميات الموجبة لا يمكن أن تكون معدومة

هذه الملحوظة يؤخذ منها هو القاعدة المقررة فى شأن تغيير علامات الجذور وان المعادلة التامة التى تكون حدودها موجبة وسالبة

فاذا كان كل اثنين من جذور معادلة متساويين ومتخالفين في العلامة فان المعادلة لا تشتمل الا على قوى زوجية للمجهول ولذا يقال حيث أن الجذور مبينة هكذا

+ح ، −ح ، +د ، −د ، +ﻫ ، −ﻫ ، الخ

فيكون الطرف الأول من المعادلة كناية عن حاصل ضرب المضاريب

س−ح ، س+ح ، س−د ، س+د ، س−ﻫ ، س+ﻫ ، الخ

المساوي لحاصل ضرب المضاريب ذات درجة الثانية

س٢−ح٢ ، س٢−د٢ ، س٢−ﻫ٢ ، الخ

ولما كانت هذه المضاريب لا تحتوي الا على قوى زوجية للمجهول س كان حاصل ضربها كذلك

قاعدة العلامات لديكارت

إذا فرضت جملة حدود مسبوقة بالعلامتين + ، − أطلق على تغير العلامات لحاصل حدين متتاليين اسم المغايرة واذا لم يطرأ على حدين أنتوا بين تغيير في العلامة اطلق على ذلك اسم المداومة في المعادلة

ش

$$س^{٥} - ٣س^{٤} - ٢س^{٣} + س^{٢} - س - ١ = ٠$$

تحتوى على ثلاث مغايرات هى واحدة بين الحد الأول والثانى وواحدة بين الثالث والرابع وواحدة بين الرابع والخامس وعلى مداومتين احداهما بين الحد الثانى والثالث والاخرى بين الخامس والسادس

ومن البديهى فى كل معادلة تامة ان عدد المغايرات والمداومات يساوى درجة هذه المعادلة

والنظرية المعروفة بقاعدة العلامات للمعلم ديكارت لا تخرج عن هذه النظرية

النظرية العاشرة

بند ٤٥١ لا يلزم فى كل معادلة تامة أو غير تامة ان عدد الجذور الموجبة يزيد عن عدد المغايرات

فاذا فرض فى مبداء الأمر أنه قد تحصل حاصل ضرب المضاريب المطابقة لكل من الجذور التخيلية والسالبة للمعادلة فانه يلزم لتحصيل الطرف الأول من هذه المعادلة ان يضرب على التوالى الحاصل المذكور فى جميع المضاريب المطابقة للجذور الموجبة وحينئذ لا تتحقق هذه النظرية الا اذا شوهد عند ضرب كمية كثيرة الحدود فى مضروب كالمضروب

فمقتضى ما تقرر ثبت أنه اذا كانت حدود المضروب تكون حدودها ... الجبرية الكبيرة الحدود في $-ج$ محتوية على المجهول س بالأسس $م-ح+١$ و $م-ط+١$ و $م-ك+١$ ... التي تكون حدودها متحدة في العلامة مع الحدود المحتوية على س بهذه الأسس في حاصل ضرب المضروب في س ... ينتج ... تكون الحدود المحتوية على المجهول س بهذه الأسس في حاصل الضرب الكلي متحدة في العلامة أيضا

اذا تقرر هذا شوهد أنه يوجد في المضروب مغايرة واحدة من الحد الأول $س^{م}$ الى الحد $-ج\, س^{م-ح}$ وانه يوجد في حاصل الضرب بالأقل مغايرة واحدة من الحد الأول $س^{م+١}$ الى الحد $-ج'\, س^{م-ح+١}$ لان هذين الحدين مختلفان في العلامة وكذا لا يوجد في المضروب الا مغايرة واحدة من الحد $-ج\, س^{م-ح}$ الى الحد $+ع\, س^{م-ت}$ ويوجد في حاصل الضرب بالأقل مغايرة واحدة بين الحدين $-ج'\, س^{م-ح+١}$ و $+ع'\, س^{م-ع+١}$ ومن هنا يرى أن عدد المغايرات الذي يوجد في حاصل الضرب الى الحد $\pm ل'\, س^{م-ل+١}$ يكون بالأقل مساويا لعدد المغايرات الذي يوجد في المضروب الى الحد

+ $ك س^{م-ك+١}$ لكنه لا يوجد بالابتداء من هذا الحد في المضروب مغايرة مع $أ$ واما حاصل الضرب فانه يوجد فيه من ابتداء الحد $ك س^{م-ك+١}$ الى الحد الاخير + $ر^م$ مغايرة واحدة بالأقل وبناءً على ذلك تكون المغايرات الموجودة في حاصل الضرب اكثر من المغايرات الموجودة في المضروب ولو بمغايرة واحدة

بند اذا تحصل من عملية الضرب في مضروب واحد مطابق لجذر موجب عدة مغايرات فلا يكون عددها الا فرديًا لانه اذا فرض في مبداء الامر أن الحد الأخير من المضروب مسبوق بعلامة + لزم إن تغيرت علامات الضرب أن يكون عدد التغيرات زوجيًا على أن عدد المغايرات الموجودة في المضروب يكون صفرًا او عددًا زوجيًا فيكون عدد المغايرات الموجودة في حاصل الضرب فرديًا واذا كان الحد الأخير من المضروب المذكور مسبوقًا بعلامة − كان عدد المغايرات الموجودة في الكمية الكثيرة الحدود المفروضة فرديًا وفي هذه الحالة يكون الحد الأخير من حاصل الضرب مسبوقًا بعلامة + ويكون عدد مغايراته زوجيًا وبناءً على ذلك يكون عدد مغايرات حاصل الضرب مختلفًا دائمًا عن عدد مغايرات المضروب بعدد فردي

ويشاهد

ويشاهد ايضاً بمقتضى النظريتين المقررتين (فى بندى ١٣٠ و ١٣١) انه يلزم ان يكون الحد الأخير من حاصل ضرب المضاريب المطابقة للجذور السالبة والتخيلية موجباً وبناءً على ذلك اذا كان هذا الحاصل محتوياً على مغايرات فلا تكون الا زوجية العدد وحيث أن كل واحد من المضاريب المطابقة للجذور الموجبة يشتمل على عدد فردى من المغايرات فان كان عدد المغايرات اكبر من عدد الجذور الموجبة فانه يكون أكبر منه بعدد زوجى

... وحيث ان علامات جذور معادلة تتغير كلها عند وضع ... يؤخذ من النظرية السابقة ان عدد الجذور ... لا يزيد عن عدد مغايرات المعادلة المحولة التى ... بدل س

... كانت المعادلة تامة فانه لا يترتب على وضع − س بدل س ... علامات الحدود الزوجية المرتبة (كما فى بند ٢٤٨) ... على ذلك تؤول المغايرات الى مداومات وبالعكس وحينئذ ... يمكن فى معادلة تامة ان يكون عدد الجذور السالبة أكبر من عدد ... المداومات

وهذا لايتأتى اذا كانت المعادلة غير تامة لانه اذا فرضت المعادلة

$س^٣ - ٢س + ١ = ٠$ مثلاً شوهد انها لاتشتمل على مداومة واحدة

مع انها تشتمل على جذر سالب بالأقل (كما في بند ١٣)

بند ٢٥٤ اذا جعل ت رمزاً لعدد مغايرات معادلة ، ت َ رمزاً

لعدد مغايرات المعادلة المحولة المتحصلة من وضع $-س$ بدل س

فلا يمكن ان يكون عدد الجذور الحقيقية للمعادلة اكبر من ت + ت َ

وحينئذ اذا كان هذا المجموع اقل من الدرجة م كان ب في جذور المعادلة

تخيلية

مثلاً لنفرض المعادلة $س^٣ - ٢س + ١ = ٠$ التي يكون فيها ت = ٢

فاذا وضع فيها $-س$ بدل س كان ت َ = ١ وحينئذ يكون

ت + ت َ = ٣ وبناءً على ذلك يكون للمعادلة جذران تخيليان بالأقل

وحيث ان المجموع ت + ت َ لا يزيد دائماً عن الدرجة م

فان كان أقل منها فان الفرق بينهما يكون عدداً زوجياً الا انه ان كانت

المعادلة تامة كان المجموع ت + ت َ مساوياً لعدد المغايرات والمداومات

المساوى للدرجة م وحينئذ يلزم لاعتبار الحالة التي تكون فيها

المعادلة ناقصة بعض حدود فيقال اذا اعتبرت متسلسلة مركبة

من حدود متوالية عددها ع+١ كالمتسلسلة ± م سَ^م ± ع س^{م-١}
. . ± ع س^{م-ع+١} ± ط س^{م-ع}

فانه يحصل من هذه الحدود المتسلسلة فى المعادلة المفروضة وفى
المعادلة المحولة مغايرات عددها ع فان قطع النظر عن سائر حدود
هذه المتسلسلة ماعدا احدها الأول وهو ± م سَ^م والاخير وهو
± ط س^{م-ع} يتولد من ذلك حالتان متباينتان احداهما الحالة التى
يكون فيها ع زوجيــًّا والثانية التى يكون فيها ع فرديــًّا
فــاذا وضع فى الحالة الاولى −س بدل س فى المعادلة
فإما ان تغير علامة الحدين ± م سَ^م و ± ط س^{م-ع} وإمّا ان
لاتتغير وبنا على ذلك ان تخالف هذان الحدان فى العلامة تحصل
منها فى المعادلة المفروضة والمحولة مغايرتان وان اتحدا فى العلامة
فلا يحصل منهمــا مغايرة مّا واذا وضع فى الحالة الثانية
−س بدل س فى المعادلة فان علامة أحد الحدين المذكورين
لاتتغير وأمّا علامة الآخر فانها تتغير وبنا على ذلك ان تحصل
منها فى المعادلة المفروضة مغايرة فلا يحصل منها فى المحولة مغايرة
مثلها وبالعكس

ومن هنا يؤخذ أولاً اذا كان ع = ٢ كما في الحالة التي لم يحذف فيها
من المعادلة غير حد واحد أن المجموع ت + تَ يكون مساوياً للدرجة م
ان كان الحدان اللذان يوجد بينهما الحد المحذوف متخالفين في العلامة
ويكون المجموع المذكور مساوياً للدرجة م − ٢ ان كانا متحدين في العلامة
وثانياً انه اذا كان ع عدداً زوجياً اكبر من ٢ فبعد حذف
سائر الحدود المحصورة بين ± م سُ ن ± ط سُ ن−ع يكون
المجموع ت + تَ مساوياً للدرجة م − (ع − ٢) أو م − ع بحسب
ما يكون الحدان ± م سُ ن ± ط سُ ن−ع متخالفين في العلامة
أو متحدين فيها وثالثاً انه اذا كان ع عدداً فردياً فان المجموع
ت + تَ يكون بعد حذف الحدود المحصورة بين الحدين
± م سُ ن ± ط سُ ن−ع مساوياً للدرجة م − ع + ١ وحينئذٍ
يكون المجموع ت + تَ في معادلة غير تامة مساوياً دائماً في النهاية
لدرجة هذه المعادلة فان كان اقل منها كان الفرق بينهما عدداً زوجياً
ويشاهد زيادة على ذلك انه اذا نقصت قوة واحدة من قوى
المتغير س بين حدين متخالفين في العلامة وكان المجموع ت + تَ
مساوياً للدرجة م أمكن أن تكون سائر الجذور حقيقية واذا
نقصت

نقصت قوة واحدة للمتغير س بين حدين متحدين في العلامة كان بين جذور المعادلة جذران تخيليان بالأقل فان نقصت المعادلة قوى متوالية عددها ع-١ للمتغير س وكان ع عدداً زوجياً كانت عدد الجذور التخيلية للمعادلة مساوياً بالأقل ع-٢ متى كانت الحدود التي توجد بينها هذه القوى المحذوفة للمتغير س متخالفة في العلامة أو انه يكون مساوياً بالأقل العدد ع متى كانت الحدود المذكورة متحدة في العلامة فان كان ع عدداً فردياً كان للمعادلة بالأقل جذور تخيلية عددها ع-١

ومتى كانت جميع جذور معادلة حقيقية كان عدد الجذور ٢٥٤ الموجبة مساوياً لعدد المغايرات الموجودة في المعادلة وعدد الجذور السالبة مساوياً لعدد المغايرات الموجودة في المعادلة المحولة الحاصلة من وضع - س بدل س

لانه اذا جعل ف رمزاً للعدد الأول من المغايرات و ث رمزاً للعدد الثاني منها و ع رمزاً لعدد الجذور الموجبة و ح رمزاً لعدد الجذور السالبة و م رمزاً لدرجة المعادلة فحيث أن سائر الجذور حقيقية فيكون ع+ح=م وحيث أن المجموع ف+ث

لا يزيد عن المجموع ت + ثَ الذى يساوى فى النهاية الدرجة م فيلزم أن يكون

ت + تَ = م أو ت + ثَ = ع + ح

اذا تقرر هذا وكان ع أقل من تَ فانه يلزم ان يكون ح > تَ

وهذا مستحيل وحينئذ يكون ع = تَ و ح = ثَ

فاذا كانت المعادلة تامة فان عدد مغايرات المعادلة المحولة يكون مساويًا لعدد مداومات المعادلة المفروضة وفى هذه الحالة اذا كانت جميع الجذور حقيقية كان عدد الجذور السالبة مساويًا لعدد المداومات

الباب العاشر
فى البحث عن الجذور الحقيقية للمعادلات الرقمية ذات المجهول الواحد وفى نهايات الجذور

فى الطرق التى بها تتعين الجذور الحقيقية لمعادلة هى من الطرق التقريبية وأول مسئلة توضع لحصر هذه الطرق التقريبية هى أنه يلزم ايجاد عددين تكون الجذور محصورة بينهما وهذان العددان

هذا المعروف بنهايتي الجذور وقد تقدم (في بند ١٢٦) انه يوجد دائماً عدد يكون كل واحد من مقادير المجهول اكبر منه وانه يترتب على كل واحد منها ان الطرف الأول من المعادلة تكون له مقادير متحدة في العلامة مع الحد الأول ومن البديهي أن هذا العدد هو النهاية الكبرى لجذور المعادلة ولبيان الكيفية التي بها يمكن ايجاد هذه النهاية يبرهن في مبدأ الأمر على ان الحد الأول من المعادلة الذي يفرض موجبا يكون اكبر من مجموع الحدود السالبة عند ما يفرض للمتغير س مقدار موجب أو مقدارا اكبر منه لانه اذا احولت سائر الحدود الموجبة من المعادلة الى الطرف ماعدا الحد الأول تحصلت من ذلك كمية كثيرة الحدود كالكمية

$$\text{س}^{\text{م}} - \text{ج}_{1}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ع}} - \text{أ}_{1}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ح}} - \text{هـ}_{1}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ك}} - \text{الخ}$$

فاذا وضعت المتباينة

$$\text{س}^{\text{م}} > \text{ج}_{1}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ع}} + \text{أ}_{1}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ح}} + \text{هـ}_{1}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ك}} + \text{الخ}$$

فانه يشاهد انها تتحقق اذا تحصلت المتباينة

$$1 > \frac{\text{ج}_{1}}{\text{س}^{\text{ع}}} + \frac{\text{أ}_{1}}{\text{س}^{\text{ح}}} + \frac{\text{هـ}_{1}}{\text{س}^{\text{ك}}} + \text{الخ}$$

التي يكون طرفها الثاني صغيراً بقدر ما يكون مقدار المتغير س

الحدود

$$ح_١ (س^{م-١} + س^{م-٢} + \dots + س + ١) \text{ أو } \frac{ح_١ (س^م - ١)}{س - ١}$$

فيمكن وضع المباينة السابقة هكذا :

$$س^م > \frac{ح_١ (س^م - ١)}{س - ١}$$

وحيث أن مقدار المتغير س لا يكون إلا من الأعداد التي تزيد عن الواحد كما يفهم ذلك من منطوق المسألة فيكفي لذلك أن يكتب

$$س^م = \text{ أو } > \frac{ح_١ س^م}{س - ١}$$

ومن هنا ينتج

$$س - ١ = \text{ أو } > ح_١ \quad \text{ ومنها يحدث } \quad س = \text{ أو } > ١ + ح_١$$

وبناء على ذلك يؤخذ من هنا انه يلزم لتعيين النهاية الكبرى للجذور الموجبة لكل معادلة ان يضاف الى الواحد المقدار المطلق لأكبر معامل سالب

بند ٥٧ اذا كانت الحدود السالبة لا ابتداء بعد الحد الأول مباشرة أمكن تحصيل نهاية أصغر من النهاية السابقة

ولبيان ذلك تفرض المعادلة

$$س^م \dots - ف_١ س^{م-ع} \pm ع_١ س^{م-ع-١} \dots \pm ك = ٠$$

وحيث أن الحد $-ف\, س^{م-ع}$ هو أول حد سالب وأن الحدود التالية له قد تكون موجبة وقد تكون سالبة فإذا جعل $ح_1$ رمزاً للمقدار المطلق لأكبر معامل سالب ووضعت المتباينة

$$س^{م} > ح_1 س^{م-ع} + ح_1 س^{م-ع-1} + \dots + ح_1 س + ح_1$$

شوهد أن كل مقدار يعرض للمتغير $س$ ويكون محققاً لهذه المتباينة يصير الحد الأول $س^{م}$ أكبر من مجموع سائر الحدود السالبة التي توجد في المعادلة وحيث أن المتباينة المذكورة تؤول الى المتباينة

$$س^{م} > ح_1 \frac{س^{م-ع+1}-1}{س-1}$$

فاذا كان لا يبحث عن مقدار المتغير $س$ الا بين الاعداد التي تزيد عن الواحد فانه يكفي لذلك ان يكون

$$س^{م} > \frac{ح_1 س^{م-ع+1}}{س-1} \quad أو \quad س^{ع-1}(س-1) > ح_1$$

وحينئذ لا يتحقق هذا الشرط الأخير الا اذا كان

$$(س-1)^{ع-1}(س-1) = أو > ح_1 \quad أو كان \quad (س-1)^{ع} = أو > ح_1$$

ومن هنا ينتج

$$س = أو > 1 + \sqrt[ع]{ح_1}$$

وحينئذ يؤخذ من ذلك ايضاً أنه يلزم لايجاد نهاية كبرى للجذور

الموجبة اذا نقصنا الى الواحد جذر المقدار المطلق لاكبر المكورات السالبة الذى تكون درجته هى الفاضل بين درجة المعادلة وأس اول حد سالب

تنبيه

اذا كان المكور ج أصغر من الواحد فان النهاية ١ + ج تؤثر فى الدول على النهاية المتحصلة بواسطة القاعدة السابقة

ويمكن ايضا تحصيل نهاية كبرى للجذور الموجبة بطريقة المعلم نوتون وهى

انه اذا فرضت المعادلة د (س) = ٠ واريد تحصيل معادلة أُخرى حقيقية الجذور لا تختلف جذورها عن جذور المعادلة المفروضة الا بكون كل واحد منها ينقص عن نظيره بكمية واحدة كالكمية ع لزم أن يوضع ص = س - ع ومن هنا يؤخذ أن س = ص + ع فتكون المعادلة المحولة د (ص + ع) = ٠ أو

$$\text{د}(\text{ع})+\text{د}'(\text{ع})\,\text{ص}+\text{د}''(\text{ع})\frac{\text{ص}^{2}}{1\times 2}+\text{د}'''(\text{ع})\frac{\text{ص}^{3}}{1\times 2\times 3}+\text{الخ}=0$$

اذا تقرر هذا وتعين العدد ع على وجه بحيث تكون جميع حدود المعادلة السابقة موجبة فانه لا يكون لهذه المعادلة جذر موجب

(كلما)

(كما في بند ٤٤٩) فاذاً لا يكون للمعادلة المفروضة د(س) = ٠ جذر أكبر من ع واذاً يكون هذا العدد هو النهاية الكبرى للجذور الموجبة للمعادلة د(س) = ٠

ولتحصيل عدد كالعدد ع به تصير جميع الدلالات د(س) و د َ(س) و د ً(س) الخ موجبة تعتبر في مبداء الامر المشتقة ذات المرتبة م-١ التي لا تشتمل على المتغير س الا بدرجة اولى ثم يعين لهذا المتغير مقدار يصيّرها موجبة ثم يوضع هذا المقدار في المشتقة ذات المرتبة م-٢ فان كان الناتج المتحصل سالباً فانه يلزم أن يزاد مقدار المتغير س عن أصله واحداً فواحداً وهكذا بطريق التوالى الى ان يتوصل الى عدد يتحصل منه ناتج موجب ثم يتوالى العمل بهذه المثابة في الدلالات المتوالية الى الدلالة د(س)

فاذا كان عدد كالعدد عَ يصيّر المشتقات موجبة من ابتداء المشتقة ذات المرتبة م-١ الى المشتقة ذات المرتبة ٢ وأضيف الى هذا العدد بالتوالى واحداً وعدة احاد حتى نتوصل الى المشتقة ذات المرتبة ن-١ فلكى تكون موجبة يلزم أن يتحقق ان المقدار الجديد الذى يفرض للمتغير س يصيّر آخر المشتقات

يمكن ابتداء من المشتقة ذات الرتبة م ـ ١ الى المشتقة ذات الرتبة

ن انه يوجد

$$د(ع+ه) = د(ع) + ه د^{\prime}(ع) + \cdots + \frac{ه^{م}}{١ \times ٢ \cdots م} د^{(م)}(ع) + \cdots$$

وحينئذ اذا كانت الدلالات $د(ع)$ و $د^{\prime}(ع)$ و $د^{\prime\prime}(ع)$ … $د^{(م)}(ع+ه)$

كلها موجبة كانت ه كمية موجبة ايضا وبناء على ذلك تكون $(ع)$ $(ع+ه)$ كمية موجبة

بند ٤٤٩ ومتى كانت جذور المعادلة المفروضة كلها حقيقية أمكن

بواسطة الطريقة السابقة تحصيل أقرب نهاية أى تحصيل العدد الصحيح

الذى يزيد عن أكبر جذر لانه لما كانت جميع الجذور حقيقية كانت

جميع جذور المعادلة المحتوية على المتغير ص حقيقية ايضا ولكيلا

يكون لهذه المعادلة جذر موجب يلزم أن تكون جميع حدودها موجبة

وحينئذ اذا كان لا يعتبر فى التجاريب غير الاعداد الصحيحة فانه يلزم

دائما تعيين أصغر عدد صحيح تكون مقادير الطرف الاول من المعادلة

هى ومشتقاتها موجبة

بند ٤٥٠ ولتحصيل نهاية صغرى للجذور الموجبة يوضع $\frac{١}{ص}$ بدل س

فاذا فرض أن ل هى النهاية الكبرى لجذور المعادلة بالنسبة للمتغير

ص فن البديهى أن $\frac{١}{ل}$ هى أصغر نهاية لجذور المعادلة بالنسبة الى س

$(س - \frac{٥}{٣})^٢ + \frac{٥٠}{٩}$ موجبة بالنسبة لسائر المقادير الحقيقية المفروضة للمتغير س فيكون العدد ٤ نهاية كبرى للجذور الموجبة وتكون هذه النهاية بمقتضى القاعدة المتقدمة (في بند ٥٦) مبينة بالعدد ١٠١ ولنفرض ايضاً المعادلة

$$٢ س^٦ - ٧ س^٥ + س^٤ + ٢ س^٣ - ٦٠ س - ٤٨ = ٠$$

التي يمكن وضعها بالصورة

$$٢ س^٥ (س - \frac{٧}{٢}) + س^٤ + ٢ س^٣ - ٦٠ س - ٤٨ = ٠$$

فيشاهد أن الكمية ذات الحدين $س - \frac{٧}{٢}$ تكون موجبة بالنسبة لكل مقدار يفرض للمتغير س بشرط ان يكون هذا المقدار اكبر من $\frac{٧}{٢}$ ويشاهد أيضاً بمقتضى القاعدة المتقدمة في (بند ٥٧) أن الكمية الكثيرة الحدود $س^٤ + ٢ س^٣ - ٦٠ س - ٤٨$ تكون موجبة بالنسبة الى $س = ١ + \sqrt[٣]{٦٠}$ والى كل مقدار اكبر من هذا المقدار وحيث أن $١ + \sqrt[٣]{٦٠}$ محصور بين ٤ و ٥ فيكون العدد ٥ هو النهاية الكبرى للجذور الموجبة للمعادلة

ويمكن في هذا المثال تحصيل نهاية أصغر من النهاية ٥ لانه لما كان لا يوجد في الكمية الكثيرة الحدود $س^٤ + ٢ س^٣ - ٦٠ س - ٤٨$ الا تغايرة [illegible] واحدة

ة فان اخذ س في الزيادة بالابتداء من الصفر فان مقدار الكمية

ة المحدودة لا يزال آخذاً في الزيادة ولا تتغير علامته الا مرة

ة كما تقدم (في بند ٢٣٢) وحينئذ يرى أن المقدار المذكور

ب بالنسبة الى س = ٤ وحيث انه يرى أن الكمية ذات الحدين

٧ موجبة ايضاً بالنسبة الى س = ٤ فيكون العدد

اية كبرى للجذور الموجبة

جعل س = ٣ في الكمية الكثيرة الحدود س٤ + ٢س٣ − ٦٠س − ٤٨

من ذلك ناتج سالب وبناء على ذلك تكون هذه الكمية الكثيرة

د سالبة ايضاً بالنسبة الى كل مقدار يفرض للمتغير س بشرط

ن هذا المقدار أصغر من ٣ وحيث أن س − ٧ سالب

النسبة الى س = ٣ والى كل مقدار يفرض لهذا المتغير

ان يكون أصغر من ٣ فيكون العدد ٣ نهاية صغرى للجذور

ة للمعادلة

ضت ايضاً المعادلة

$س^٧ − ٢س^٦ − ٥س^٥ + ١٠س^٤ − س^٣ − ٨س^٢ + ٥٠س + ٦٠ = ٠$

ل النهاية الصغرى للجذور الموجبة لهذه المعادلة توضع

بالصورة

$$٦٠ + ٥٠ س - ٨ س^{٢} - ٢ س^{٣} + س^{٤} (١٢٠ - ٥ س - ٢ س^{٢}) + س^{٧} + س^{٨} = ٠$$

ومن المحقق بمقتضى البراهين المتقدمة (في بندي ٢٣٢ و ٢٥٥)
انه اذا كانت الكمية الكثيرة الحدود والمرتبة بحسب الدرجات التصاعدية
للحرف س مركبة من حد واحد أو من عدة حدود موجبة متبوعة
بحدود كلها سالبة فانها ان كانت موجبة بالنسبة لأى مقدار
رقمي بفرض للمتغير س كانت موجبة كذلك بالنسبة لأى مقدار
رقمي اصغر منه
وحيث أن الكميتين الكثيرتي الحدود $٦٠ + ٥٠ س - ٨ س^{٢} - ٢ س^{٣}$ و
$١٢٠ - ٥ س - ٢ س^{٢}$ موجبتان بالنسبة الى $س = ٤$ فيكون
العدد ٤ نهاية صغرى للجذور الموجبة للمعادلة
فاذا وضعت المعادلة بالكتابة

$$س^{٥} (س^{٣} + س^{٢} - ٢ س - ٥) + س^{٢} (١٢٠ س^{٢} - ٢ س - ٨) + ٥٠ س + ٦٠ =$$

شوهد أن العدد ٢ نهاية كبرى للجذور الموجبة وبناء على ذلك
لا يكون للمعادلة جذر موجب وحيث أنه يوجد بها أربع مغايرات
فيكون لها بالأقل أربعة جذور تخيلية

ويمكن أن يكون ... مختلفا عن واحد

يمكن ان تكون ... المنطقة اعدادا صحيحة أو كسورا ...

البحث عن الجذور الصحيحة نفرض لمزيد الايضاح المعادلات ...

الدرجة الرابعة

$$ج_{١} س^{٤} + ء_{١} س^{٣} + ه_{١} س^{٢} + ع_{١} س + ف = ٠$$

فاذا جعل ح كناية عن جذر صحيح لهذه المعادلة فانه يحدث

$$ج_{١} ح^{٤} + ء_{١} ح^{٣} + ه_{١} ح^{٢} + ع_{١} ح + ف = ٠$$

ومن هنا يؤخذ

$$\frac{ف}{ح} = - ج_{١} ح^{٣} - ء_{١} ح^{٢} - ه_{١} ح - ع_{١}$$

وحيث أن الطرف الأول من هذه المتساوية عدد صحيح فيلزم أن ح

يقسم ف قسمة بلا باقي

وبجعل $\frac{ف}{ح} = ف'$ ينتج من المتساوية السابقة

$$\frac{ف' + ع_{١}}{ح} = - ج_{١} ح^{٢} - ء_{١} ح - ه_{١}$$

وحينئذٍ يعلم من هنا أن ح يقسم ايضًا ج + ف قسمة بلا باقٍ

واذا جعل $\frac{ف + ج_١}{ح} = ه$ حدث

$\frac{ه + ه_١}{ح} = -ج_١ ح - ج_١$

ومن هنا يؤخذ ان ح يقسم ايضًا ه + ه قسمة بلا باق فاذا

جعل $\frac{ه + ه_١}{ح} = ه$ حدث

$\frac{ه + د}{ح} = -ج_١$

فاذا تحقق هذا الشرط الأخير كان ح هو جذر المعادلة

المفروضة اذ بمقتضى هذا الشرط تكون $\frac{ه + د_١}{ح} + ج_١ = ٠$

وحينئذٍ تكون الكمية $\frac{ه + د}{ح} + ج_١$

للعدد ومقدارها الناتج المتحصل من وضع ح بدل س

في الطرف الأول من المعادلة بعد قسمتها على $ح^٤$ وعلى ذلك

يلزم لكي تكون كمية صحيحة كالكمية ح جذر المعادلة

اولًا ان هذه الكمية تكون قاسمة للحد الأخير

وثانيًا انه اذا اضيف الى خارج قسمة الحد الأخير على ح مكرر

الحد المحتوي على س كان خارج قسمة المجموع على ح عددًا صحيحًا

وثالثًا انه اذا اضيف الى هذا الخارج الأخير مكرر الحد المحتوي على

ثم كان خارج قسمة المجموع على ح عدداً صحيحاً وهلم جرا

وبالجملة اذا توالى العمل الى أن تحصل خارج القسمة الذي مرتبته (م-١)

(في معادلة درجتها م) واضيف الى هذا الخارج مكرر الحد المحتوي

على $س^{م-١}$ وقسم المجموع على ح تحصل من ذلك خارج قسمة يكون

مساوياً لمكرر الحد الأول المأخوذ بعلامة مخالفة لعلامته

فان كانت المعادلة غير تامة أجريت عليها عملية المعادلة التامة

وذلك بأن يجعل الصفر مكرراً لكل من قوى المتغير س الناقصة

من هذه المعادلة

بند ٢٦٤ ولتحصيل الجذور الصحيحة لمعادلة بواسطة الشروط المذكورة

تجرى عملية الحساب كما في المثال

$$س^{٥} + ٥ س^{٤} + س^{٣} - ١٦ س^{٢} - ٢٠ س - ١٦ = ٠$$

المبين في هذا الجدول

الذى هو $-$ ٥

وتحصل حدود الصف الرابع بواسطة قسمة كل حد من الصف السابق عليه على حد الصف الأول المتقدم اذا كانت القسمة صحيحة بلا باق

وتتكون باقى الصفوف بهذه المثابة

وحينئذ تكون الجذور الصحيحة هى $+٢ ، -٢ ، -٤$

فاذا قسم الطرف الأول من المعادلة على حاصل ضرب المضاريب $س - ٢$ و $س + ٢$ و $س + ٤$ تحصل خارج القسمة $س^٢ + س + ١$

وحينئذ يحدث الجذران الآخران من حل المعادلة $س^٢ + س + ١ =$ ٠

ويحذف عادة من الجدول السابق القاسمان $+١$ و -١ لانه يسهل استخراجهما من المعادلة مباشرة ويمكن ايضا فى مبدأ الأمر تعيين نهايتى الجذور ويجب ان لا تجرب الا القواسم المحصورة بين هاتين النهايتين ويؤخذ من المثال السابق ان نهاية الجذور الموجبة المحسوبة بواسطة القاعدة المتقدمة (فى بند ٥٢٦) هى $١ + \sqrt[٣]{٢٠}$ وهى عدد اقل من ٤ فاذا وضع فى المعادلة $-س$ بدل $س$ شوهد أن -٥ هو نهاية الجذور السالبة وحينئذ

لا تجرب غير الأعداد + ٢ ، +١ ، -١ ، -٢ ، -٤

٦٥ بند فاذا فرضت ايضًا المعادلة

٢ س^٣ - ٣٥ س + ١٠٥ = ٠

فلا يكون العددان +١ و -١ جذرين لها وتكون النهايات هما + $\sqrt{\frac{٣٥}{٢}}$ و -(١+ $\sqrt{\frac{١٠٥}{٢}}$) وتكون قواسم العدد ١٠٥ المحصورة بين هاتين النهايتين هي ٣ ، ٥ ، -٣ و -٥ و -٧ وهذه القواسم تستلزم اجراء العمليات الآتية وهي

+٥ ، +٣ ، -٣ ، -٥ ، -٧

+٢١ ، +٣٥ ، -٣٥ ، -٢١ ، -١٥

-٣٢ ، -١٨ ، -٨٨ ، -٧٤ ، -٦٨

٠ -٦ . . .

-٢ . . .

فيشاهد بعد تحصيل الصف الثالث انه لا ايراد من توالى هذه العمليات التجربية الا تحصيل القاسم +٣ وينبغى أن يضاف الى خارج القسمة -٦ مكرر الحد المحتوى على المتغير س وحيث أن هذا الحد ناقص يكون مكرره مساويًا للصفر وحينئذ يلزم ان يقسم

ــ٦ س + ٣ وحيث ان خارج س الو نكو ر لحد الأول من المعادلة مأخوذاً بعلامة مخالفة ... فيكون ــ٣ هو أحد الجذور المطلوبة

وحيث كان خارج قسمة ٢ س^٣ ــ ٥ س^٢ + ١٠٥ على س ــ ٣ هو ٢ س^٢ + ٦ س ــ ٣٥ يحصل الجذران الآخران بواسطة حل معادلة ٢ س^٢ + ٦ س ــ ٣٥ = ٠ وهذان الجذران غير منطقين

بند ٦٦ وحيث انه يمكن ان جذور المعادلة المفروضة تكون متساوية عند قسمتها على حاصل ضرب المضاريب المطابقة للجذور الصحيحة المتحصلة يلزم أن تجرى العملية على المعادلة الناتجة منها كما اجريت عليها بشرط ان لا تستعمل غير الجذور المتحصلة ثم يتوالى العمل بهذه الطريقة حتى تحصل معادلة لا تكون مشتملة على واحد من الجذور الصحيحة للمعادلة المفروضة وحينئذ تعلم الجذور المكررة ودرجة تكرار كل منها

بند ٦٧ اذا فرض ... كسر ... جذراً للمعادلة

$$ج_٠ س^م + ج_١ س^{م-١} + ج_٢ س^{م-٢} \ldots + ج_{م-١} س + ج_م = ٠$$

وكانت المكررات ج٠ ج١ ... اعداداً صحيحة فبذلك وضع هذه

المعادلة $\frac{\text{ح}}{\text{د}}$ بدل س تحصل

$$\text{ج}_{\text{٠}}\frac{\text{ح}^{\text{م}}}{\text{د}^{\text{م}}}+\text{ج}_{\text{١}}\frac{\text{ح}^{\text{م}-\text{١}}}{\text{د}^{\text{م}-\text{١}}}+\text{ج}_{\text{٢}}\frac{\text{ح}^{\text{م}-\text{٢}}}{\text{د}^{\text{م}-\text{٢}}}+\dots+\text{ج}_{\text{م}-\text{١}}\frac{\text{ح}}{\text{د}}+\text{ج}_{\text{م}}=\text{٠}$$

وبضرب هذه المساواة الكثيرة الحدود فى $\text{د}^{\text{م}}$ يحدث

$$\text{ج}_{\text{٠}}\text{ح}^{\text{م}}+\text{ج}_{\text{١}}\text{ح}^{\text{م}-\text{١}}\text{د}+\text{ج}_{\text{٢}}\text{ح}^{\text{م}-\text{٢}}\text{د}^{\text{٢}}+\dots+\text{ج}_{\text{م}-\text{١}}\text{ح}\,\text{د}^{\text{م}-\text{١}}+\text{ج}_{\text{م}}\text{د}^{\text{م}}=\text{٠}$$

ومن هذه المتساوية يؤخذ أن خارجى قسمة $\text{ج}_{\text{٠}}\text{ح}^{\text{م}}$ على د و $\text{ج}_{\text{م}}\text{د}^{\text{م}}$ على ح يكونان عددين صحيحين وحيث ان العددين ح و د أوليان معًا فيكون العدد د قاسمًا للمكرر $\text{ج}_{\text{٠}}$ والعدد ح قاسمًا للمكرر $\text{ج}_{\text{م}}$

وهذه النظرية يستنبط منها ان الجذور المنطقة تصير كلها اعدادًا صحيحة اذا ضربت جميع الجذور فى العدد $\text{ج}_{\text{٠}}$ الذى هو مكرر الحد الأول اذ بهذه المثابة يؤول البحث عن الجذور الكسرية الى البحث عن الجذور الصحيحة لكنه يمكن ايضًا تحصيل الجذور الكسرية بواسطة اجراء العملية على المعادلة مباشرة

ويؤخذ أيضًا من هذه النظرية انه اذا كان مكرر الحد الأول هو الواحد فلا تكون الجذور المنطقة الا اعدادًا صحيحة ويشاهد ايضًا انه اذا ضربت جميع الجذور فى $\text{ج}_{\text{٠}}$ حدثت من ذلك المعادلة

ثوية التي مكرر حدها الأول هو الواحد ومكررات حدودها الأخر اعداد صحيحه

بند وحيث أن الكسر $\frac{\text{ح}}{\text{د}}$ من جذور المعادلة فيكون الطرف الأول قابلاً للقسمة على $\text{س} - \frac{\text{ح}}{\text{د}}$ ويكون الخارج (كما في بند ٣٣٧) هو

$$\text{ح}_{0}\,\text{س}^{\text{م}-1} + \left|\begin{array}{l}\text{ح}_{0}\frac{\text{ح}}{\text{د}}\\ +\,\text{ح}_{1}\end{array}\right| \text{س}^{\text{م}-2} + \left|\begin{array}{l}\text{ح}_{0}\frac{\text{ح}^{2}}{\text{د}^{2}}\\ +\,\text{ح}_{1}\frac{\text{ح}}{\text{د}}\\ +\,\text{ح}_{2}\end{array}\right| \text{س}^{\text{م}-3} \ldots + \begin{array}{l}\text{ح}_{0}\frac{\text{ح}^{\text{م}-1}}{\text{د}^{\text{م}-1}}\\ +\,\text{ح}_{1}\frac{\text{ح}^{\text{م}-2}}{\text{د}^{\text{م}-2}}\\ \ldots\ldots\\ +\,\text{ح}_{\text{م}-1}\end{array}$$

فاذا رمز الى هذا الخارج بالرمز خ والى الطرف الأول من المعادلة بالرمز ہ فانه يحدث

$$\text{ہ} = \left(\text{س} - \frac{\text{ح}}{\text{د}}\right)\text{خ} \quad \text{أو} \quad \text{ہ} = (\text{د}\text{س} - \text{ح})\,\frac{\text{خ}}{\text{د}}$$

و ہ هي كمية كثيرة الحدود تامة فاذا كان $\frac{\text{خ}}{\text{د}}$ محتوياً على مقامات كسرية فبسبب ان هذه المقامات اولية مع $\text{د}\text{س} - \text{ح}$ لا يمكن ان يكون حاصل الضرب $(\text{د}\text{س} - \text{ح})\frac{\text{خ}}{\text{د}}$ كمية كثيرة الحدود تامة (كما في بند) فاذاً يلزم أن يكون الكسر $\frac{\text{خ}}{\text{د}}$ كمية كثيرة الحدود تامة واذاً تكون خ كمية كثيرة الحدود تامة أيضاً

٢٦٩ فاذا فرض الآن انه قد تكونت سائر الكسور الموجبة والسالبة التى تكون بسوطها قواسم الحد الأخير ومقاماتها قواسم مكرر الحد الأول وكان ج واحدا من هذه الكسور فلكى يعلم هل هذا الكسر من جذور المعادلة ٩س = ٠ ام لا يضرب العدد ج الذى هو مكرر الحد الأول فى ج ثم يضاف الحاصل الضرب العدد م الذى هو مكرر الحد سم-١ ويضرب المجموع فى ج ويضاف الى الحاصل العدد ج الذى هو مكرر الحد سم-٢ وهلم جرا وحينئذ يلزم ان تكون جميع النواتج المتحصلة اعدادا صحيحة ويكون الناتج الأخير مساويا للصفر

فاذا تحصل جذر كالجذر ج علم مباشرة خارج قسمة الطرف الأول من المعادلة على س - ج وبقسمة هذا الخارج على ء يتحصل خارج قسمة الكمية الكثيرة الحدود ٩ على ءس - ج ويجعل هذا الخارج الأخير مساويا للصفر تتحصل معادلة دون المعادلة المفروضة فى الدرجة منها تتحصل الجذور الأخر

٢٧٠ وحيث أن خارج قسمة ٩ على ءس - ج كمية كثيرة الحدود تامة فينتج من ذلك بفرض س = ١ و س = -١ انه اذا كان

$\frac{ح}{ء}$ من جذور المعادلة كان الناتج الحادث من وضع +١ بدل س في الكمية ى قابلاً للقسمة على ء−ح والناتج الحادث من وضع −١ بدل س في الكمية المذكورة قابلاً للقسمة على ء+ح ثم يبحث بين الكسور المتكونة بالمثابة المتقدمة عن الكسور المحققة للشرطين المذكورين ويقطع النظر عما عداها

ولتعيين الجذور الصحيحة يلزم ان يفرض ان ء=١ وحينئذ اذا كان ح واحداً من هذه الجذور كان ح−١ قاسماً للناتج الحادث من وضع +١ بدل س و ح+١ قاسماً للناتج الحادث من وضع −١ بدل س

ولنمثل لذلك بالمعادلتين

$$٦س^{٦}-١٩س^{٥}+١٣س^{٤}+٢٠س^{٣}+٤٨س^{٢}-١٦=٠$$

و

$$١٥س^{٤}+١٦س^{٣}-٦٦س^{٢}-٥س+٦=٠$$

فاما المعادلة الاولى فيكون ٢ واحداً من جذورها الحقيقية مكرراً مرتين ويكون جذراها الآخران $\frac{٢}{٣}$ و $-\frac{١}{٧}$ واما باقي الجذور فتكون تخيلية واما المعادلة الثانية فيكون جذراها الحقيقيان $\frac{٣}{٢}$ و $-\frac{٢}{٥}$ ويكون جذراها الآخران غير منطقين

في طريقة الجذور المتساوية

بند ٢٧١ حيث أن الطرق التي يلزم استعمالها في تقدير الجذور وغير المنطقة تقتضي كما سيأتي انه لا يكون للمعادلة جذور متساوية فمن الضروري اختيار الحالة التي بها يتحقق هذا الشرط والكيفية التي يمكن بها تحويل المعادلة المفروضة الى معادلات اخرى لا يدخل كل جذر في الواحدة منها الا مرة واحدة عند عدم تحقق هذا الشرط

بند ٢٧٢ مثلاً اذا فرضت المعادلة

$$س^م + ج_١ س^{م-١} + ج_٢ س^{م-٢} + \cdots + ج_{م-١} س + ك = ٠$$

ورمز للاختصار بالرمز د(س) الى الطرف الاول من هذه المعادلة وبالرمز د'(س) لمشتقتها وهي

$$م س^{م-١} + (م-١) ج_١ س^{م-٢} + (م-٢) ج_٢ س^{م-٣} + \cdots + ج_{م-١}$$

فتكون المشتقة د'(س) مكرر الاول قوة للمتغير ص في الناتج المتحصل من وضع س+ص بدل س في الكمية الكثيرة الحدود د(س) لانه اذا رمز الجذور المعادلة بالرموز ح، و، ي، ه، ... ، ك حدث

$$د(س) = (س-ح)(س-ي)(س-ه)\cdots(س-ك)$$

ويضم

وبوضع س + ص بدل س يحصل

$$\text{د}(\text{س}+\text{ص}) = (\text{ص}+\text{س}-\text{ح})(\text{ص}+\text{س}-\text{ى})(\text{ص}+\text{س}-\text{هـ})\cdots(\text{ص}+\text{س}-\text{ك})$$

ويمكن اعتبار الطرف الثاني من هذه المتساوية كحاصل ضرب مركب من مضاريب كميات ذات حدين عددها م وحدها الاول ص وحدودها الثانية س − ح و س − ى الخ وبناء على ذلك يكون مكرر اول قوة للمتغير ص في هذا الحاصل مساويا لمجموع حواصل ضرب الكميات س − ح و س − ى الخ بحيث يكون عدد مضاريب كل حاصل مساويا م − ١ وحينئذ يكفي لتكوين هذه الحواصل ان تقسم بالتوالي الدلالة د(س) على كل من المضاريب س − ح و س − ى الخ فيحدث

$$\text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{س}-\text{ح}} + \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{س}-\text{ى}} + \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{س}-\text{هـ}} + \cdots + \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{س}-\text{ك}}$$

فاذا فرض الآن أن

$$\text{د}(\text{س}) = (\text{س}-\text{ح})^{\text{ع}}(\text{س}-\text{ى})^{\text{ف}}(\text{س}-\text{هـ})^{\text{ل}} \ \text{الخ}$$

فانه يلزم في مجموع خوارج قسمة الدلالة د(س) على كل من مضاريبها ان خارج قسمة د(س) على س − ح يتكرر مرارا

عددها م وخارج قسمة د(س) على س − ى يتكرر مراراً عددها ع وخارج قسمة د(س) على س − هـ يتكرر مراراً عددها ك وهو ح

وحينئذ يحصل

$$\text{د}'(\text{س}) = \text{م}(\text{س}-\text{ح})^{\text{م}-1}(\text{س}-\text{ى})^{\text{ع}}(\text{س}-\text{هـ})^{\text{ك}} + \text{ح}$$
$$+\ \text{ع}(\text{س}-\text{ح})^{\text{م}}(\text{س}-\text{ى})^{\text{ع}-1}(\text{س}-\text{هـ})^{\text{ك}} + \text{ح}$$
$$+\ \text{ك}(\text{س}-\text{ح})^{\text{م}}(\text{س}-\text{ى})^{\text{ع}}(\text{س}-\text{هـ})^{\text{ك}-1} + \text{ح}$$

وبالمقارنة بين مقدارى كل من د(س) و د'(س) يعلم ان كل واحدة منهما اى الجملتين تقبل القسمة على حاصل الضرب

$$(\text{س}-\text{ح})^{\text{م}-1}(\text{س}-\text{ى})^{\text{ع}-1}(\text{س}-\text{هـ})^{\text{ك}-1}\ \text{ح}$$

وزيادة على ذلك يرى ان هذا الحاصل هو القاسم المشترك الأعظم بين الجملتين الكثيرتى الحدود د(س) و د'(س) لانه ان لم يكن كذلك لزم ان يكون احد مضاريب د(س) قاسماً ايضاً لخارج قسمة د(س) على الحاصل المذكور وحيث أن هذا الخارج هو

$$\text{م}(\text{س}-\text{ى})(\text{س}-\text{هـ})\text{ح} + \text{ع}(\text{س}-\text{ح})(\text{س}-\text{هـ})\text{ح} + \text{ك}(\text{س}-\text{ح})(\text{س}-\text{ى})\text{ح} + \text{ح}$$

وان كل واحد من المضاريب س − ح و س − ى و ح يقسم جميع

[illegible]

عدداً كانت جذور المعادلة غير منطقية وان كان مخرج ثاني متغير

[illegible] بدرجة اولى فانه يكون دالاً على وجود جذرين متساويين

من جذور المعادلة ويكون باقي جذورها غير متساوية وان كانت

القاسم المشترك الأعظم المذكور بدرجة ثانية في ذا ... أو ...
للصفر يتحصل من ذلك معادلة يمكن أن يكون جذراها ...
أو متساويين فإن كانا غير متساويين دخل كل واحد منهما في المعادلة
د(س) = ٠ مرتين وإن كانا متساويين كان للمعادلة ثلاثة جذور
متساوية كل واحد منهما مساوٍ للمقدار المتحصل للمتغير س

بند (٧٤) ولنوضح الطريقة التي يلزم سلوكها في الحل عندما يكون
القاسم المشترك الأعظم بين د(س) و دَ(س) كمية كثيرة الحدود
درجتها أعلى من الدرجة الثانية فنقول

إذا جعل ر س رمز الحاصل ضرب العوامل البسيطة الداخلة
في الكمية الكثيرة الحدود د(س) و ر٢ س رمز الحاصل ضرب
القوى الأولى للمضاريب المتساوية مثنى و ر٣ س رمز الحاصل
ضرب القوى الأولى للمضاريب المتساوية ثلاث و ر٤ س رمز
الحاصل ضرب القوى الأولى للمضاريب المتساوية رباع وفرض
أنه لا يوجد مضاريب من الداخلة في المعادلة تزيد في الدرجة
عن ذلك فيحدث

$$د(س) = ر_1 س \; ر_2^2 س \; ر_3^3 س \; ر_4^4 س$$

فإذا جعل

وإذا قسمت المتساوية الأولى على الثانية والثانية على $\text{ص}' = \text{س} - ٢$
حدث

$$\text{ص}' = \text{س} + ٤ \quad \text{و} \quad \text{ص}'' = \text{س}^٢ - \text{س} - ٢$$

وحينئذ تكون المعادلات التي يراد حلها هي

$$\text{س} + ٤ = ٠ \quad \text{و} \quad \text{س}^٢ - \text{س} - ٢ = ٠ \quad \text{و} \quad \text{س} - ٢ = ٠$$

التي يتحصل من أولاها الجذر -٤ الذي لا يدخل في المعادلة المفروضة الا مرة واحدة ومن الثانية الجذران -١ و $+٢$ اللذان كل واحد منهما يدخل في المعادلة مرتين ومن الثالثة الجذر ٢ الذي يدخل في المعادلة ثلاث مرات

فاذا فرضت ايضاً المعادلة

$$\text{س}^٩ + ٢\text{س}^٨ + \text{س}^٧ + ٦\text{س}^٦ + ٧\text{س}^٥ - ٢\text{س}^٤ + ٣\text{س}^٣ + ٢\text{س}^٢ - ١٤\text{س} - ... = ٠$$

واجريت عليها العملية السابقة فانه يحدث من ذلك المعادلة المفروضة جذران غير متساويين وجذران كل واحد منهما يدخل فيها مرتين وجذر يدخل فيها ثلاث مرات فأما الجذران المتساويين فهما -٢ و $+١$ وأما الجذران اللذان يدخلان مرتين فهما $\frac{١ + \sqrt{-٧}}{٢}$ و $\frac{١ - \sqrt{-٧}}{٢}$ واما الجذر

الداخل

تكون الحدود

وإذاً تكون المعادلتان المطلوبتان

اذا كانت قسمة الطرف الأول من المعادلة المفروضة

بند ٢٧٩ ومتى علم جذر كالجذر ح لمعادلة امكن تعيين درجة تكرار هذا الجذر بواسطة وضعه فى المشتقات المتوالية للطرف الاول من هذه المعادلة لانه يؤخذ من النظرية المتقدمة (فى بند ٢٧٦) انه اذا كان الطرف الاول من المعادلة قابلاً للقسمة على (س-ح)^م كانت مشتقته الاولى قابلة للقسمة على (س-ح)^م-١ ومشتقته الثانية قابلة للقسمة على (س-ح)^م-٢ وهلم جرا ومشتقته ذات المرتبة م-١ قابلة للقسمة على س-ح ومشتقة التالية لها غير محتوية على المضروب س-ح وحينئذ فالجذر ح يجعل المشتقات المتوالية الى المشتقة م-١ للطرف الاول من المعادلة مساوية للصفر بشرط ان لا تؤول المشتقة التالية لهذه الاخيرة الى الصفر

بند ٢٨٠ ويمكن التوصل الى النظرية كالمتقدمة (فى بند ٢٧٦) بواسطة طريقة مغايرة للطريقة التى سلكناها وهذه الطريقة هى التى تتعين بها الدلالات المشتقة بكيفية بسيطة

لانه اذا جعل ح رمزاً للواحد من جذور المعادلة د(س)=٠ وتكونت من ذلك معادلة أخرى جذورها لا تنقص عن جذور المعادلة المفروضة الا بالجذر ح كانت لهذه المعادلة

الاخرى جذور كل واحد منها مساو للصفر بقدر ما يكون للمعادلة
المفروضة جذور كل واحد منها مساو للجذر ح ويلزم لأجل
تنقيص جميع جذور المعادلة المفروضة بالجذر ح ان يجعل
ص = س ـ ح فيكون س = ص + ح وحينئذ تكون المعادلة
المحولة مبينة بالصورة د (ص + ح) = ٠ أو

$$د(ح) + دَ(ح) ص + دً(ح) \frac{ص^٢}{١×٢} + دً''(ح) \frac{ص^٣}{١×٢×٣} + الخ = ٠$$

وحيث أن الدلالة د(ح) معدومة لكون ح هو بالفرض من
جذور المعادلة د(س) = ٠ فلا تتحقق المعادلة المحتوية على المتغير
ص الا بجعل ص = ٠ واذا كان الجذر ح مكررا مرارا عددها
م في المعادلة المفروضة وكانت المعادلة المحتوية على المتغير
ص جذور عددها م وكل واحد منها مساو للصفر فانه يلزم
ان يكون طرفها الأول قابلا للقسمة على صم وحينئذ ينبغي
أن تكون مكررات سائر القوى الصغيرة التي تنتهي بالقوة
صم-١ معدومة وبناء على ذلك اذا فرض ان الجذر ح يدخل
في معادلة مرارا عددها م فان سائر مشتقات طرفها الأول
الى المشتقة التي مرتبتها م ـ ١ تكون معدومة عند ما يفرض في

هذه المعادلة أن $س = ح$ واذا كان ح كناية عن جذر معادلة
وانعدمت في فرض $س = ح$ مشتقات الطرف الأول
الى المشتقة التي مرتبتها $م - ١$ بدون أن تنعدم
المشتقة التي مرتبتها م دخل الجذر في المعادلة مرارًا
عددها م لانه يكون للمعادلة التي جذورها لا تنقص عن جذور
المعادلة المفروضة الا بالجذر ح جذور عددها م وكل واحد
منهما مساوٍ للصفر ومن هنا تؤخذ مباشرة النظرية المتقدمة
(في ب ٢٧) لانه اذا كانت المشتقات الأول للدالة $د(س)$
التي عددها $م - ١$ تؤول الى الصفر عند جعل $س = ح$ وكانت
الأخرى غير معدومة كان للمعادلة $د'(س) = ٠$ جذور
عددها $م - ١$ وكل واحد منها مساوٍ للجذر ح وبناءً على ذلك
تكون المشتقة $د'(س)$ قابلة للقسمة على $(س - ح)^{م-١}$ وهذه
الكمية الكثيرة الحدود لا تقبل القسمة على قوة اعلى من القوة
$(س - ح)^{م}$ لانه يلزم لكي تكون المشتقة $د'(س)$ قابلة للقسمة
على $(س - ح)^{م}$ ان المشتقة النونية للدالة $د(س)$ تنعدم
عند جعل $س = ح$

ناتجان متخالفان في العلامة فاذا كان لا يوجد بين هاتين الكميتين جذر حقيقي أو كان يوجد بينهما عدد زوجي من الجذور فان الناتجين المذكورين يكونان متحدين في العلامة

ولكن المعادلة المفروضة هي ء(س) = ٠ ويجعل ل و ے رمزين لكميتين حقيقيتين ويفرض أن ل < ے . فان كان لا يوجد للمعادلة جذر يكون محصوراً بين الكميتين ل و ے المذكورتين كان الناتجان المتحصلان من وضع هاتين الكميتين بالتوالي بدل س متحدين في العلامة لانهما لو تخالفا في العلامة لوجد بين ل و ے جذر وهذا مخالف لما فرض (بند ٣٠٤)

ولنختبر الآن الحالة التي يوجد فيها بين ل و ے جذور ونفرض أن هذه الجذور مبينة بالرموز ح و ء و ه .... و ك فتكون الكمية الكثيرة الحدود قابلة للقسمة على حاصل ضرب المضاريب س ـ ح و س ـ ء و .... و س ـ ك وحينئذ اذا رمز الى الخارج بالرمز ع(س) تحصل

$$ء(س) = (س - ح)(س - ء)(س - ه) \dots (س - ك) \times ع(س)$$

فاذا فرض بالتوالي في طرف هذه المتساوية أن س = ل و س = ے

ويستنبط مباشرة من النظرية السابقة هذه النظرية وهي انه اذا انحصر بين كميتين موضوعتين في الطرف الأول من معادلة بدل المتغير ناتجان متحدا لنان في العلامة فانه لا يوجد بينهما غير جذر واحد او ان عدد الجذور المحصورة بينهما يكون فرديًا فاذا انحصل منها بينا الكميتين ناتجان مختلفان في العلامة فانه لا يوجد بينهما جذر للمعادلة وان عدد الجذور المحصورة بينهما يكون زوجيًا

تنبيه

الاثبات السابق لا يستلزم ان الجذور ح و، ح و، ... و لا تكون مختلفة عن بعضها بحيث اذا وجد بين الكميتين ل و ك جذر يكون مكررًا في المعادلة مرارًا زوجية العدد ولم يكن بينهما غيره لزم أن نعتبر ان عدد الجذور المحصورة بين هاتين الكميتين يكون زوجيًا

ينتج اذا كان الحد الأخير من معادلة موجبا فلا يكون لهذه المعادلة جذور موجبة أو ان عدد جذورها يكون زوجيًا لانه اذا وضع بالتوالي بدل س صفر والنهاية الكبرى للجذور الموجبة كان الناتجان المتحصلان متحدين في العلامة فاذا كان الحد الأخير

$$س^٤ - س^٣ - ١٠ س^٢ + س + ١٥ = ٠$$

التى تكون نهايات جذورها الموجبة والسالبة هى ٣ و٤ و -٣ بمقتضى الطريقة المتقدمة (فى ب٥٨) فاذا وضعت على التوالى بدل المتغير فى الطرف الاول من المعادلة جميع الاعداد الصحيحة المحصورة بين -٣ و +٤ شوهد أن علامات النواتج لا تختلف عن العلامات المبينة بالجدول الآتى وهو

س = -٣ ، = -٢ ، = -١ ، = ٠ ، = +١ ، = +٢ ، = +٣ ، = +٤
+ ، - ، - ، + ، + ، - ، - ، +

ومن هنا يؤخذ أن جميع جذور المعادلة حقيقية وأن اثنين منها موجبان واحدهما محصور بين ١ ، ٢ والآخر بين ٣ ، ٤ وأن الاثنين الآخرين سالبان واحدهما محصور بين -١ ، -٢ والآخر بين -٢ ، -٣

فان كانت درجة المعادلة م وعلم أن عدد جذورها الحقيقية لا يزيد عن م-٢ واجريت عملية حصر الجذور عند ما توضع بدل المتغير الاعداد الصحيحة المحصورة بين النهايتين حصل للنواتج للمعادلة

من

$$س^{٤} - ٢س^{٣} + س^{٢} - ٨س - ١٠ = ٠$$

وحيث أن هذه المعادلة تحتوي على ثلاث مغايرات فيكون لها
ثلاثة جذور موجبة وبمقتضى الطريقة المتقدمة (في ٢٨٥)
يثبت أن العدد ٣ هو النهاية الكبرى لهذه الجذور فاذا وضعت
بدل المتغير الاعداد ٠ ، ١ ، ٢ ... وهذا أنه يحصل من هذه
الاعداد نواتج سالبة وحيث أنه يحصل من العدد ٣ ناتج موجب
فيؤخذ من ذلك أنه يكون للمعادلة [illegible] = ٠
الأقل جذر سالب محصور بين −٢ ، −٣ لكن لا يعلم هل يكون
الجذران الآخران حقيقيين أم تخيليين

٢٨٥ اذا علم عدد الجذور الحقيقية فلا يبقى الا تحصيل قيمها
[illegible] هذه الكيفية وهي أن توضع بدل المتغير اعداد متقاربة
بعضها من بعض بحيث يكون للنواتج الحاصلة
تغير في العلامات بقدر ما يكون للمعادلة من الجذور
الحقيقية فان لم يكن [illegible] الجذور الحقيقية معلوما [illegible]
فبمكنة تحصيل [illegible] بين العادين المفروضة
بحيث [illegible] بين كل مقدارين مفروضين
متواليين

ان جذور المعادلة الجديدة لا تختلف بعضها عن بعض في النهاية الا بواحد وحينئذ يمكن حصر هذه الجذور بهذه الكيفية

وهي انه لا يوضع بدل المتغير غير الاعداد الصحيحة المتوالية المحصورة بين النهايتين

وهذه الطريقة المنسوبة لمهندس وارنغ قد مكثت مجهولة الى ان استكشفها المهندس لاجرانج قبل ان يقف على اشغال وارنغ المذكور وهي على غاية من الضبط الا انها تجتنب في الاعمال احيانا متى كانت المعادلة التي يراد حلها مرتفعة الدرجة وذلك لطول الحسابات التي يلزم اجراؤها لاجل تحصيل المعادلة التفاضلية ويمكن الآن الاستغناء عن هذه المعادلة بنظرية شهيرة استكشفها المهندس سطورم نتصدى لذكرها فنقول

نظرية المهندس سطورم واستعمالها في البحث عن الجذور الحقيقية

٢٨٦ لنفرض أن ق = ٠ معادلة بأي درجة جميع جذورها غير متساوية ويجعل ق رمزا للدالة المشتقة من ق ثم تجرى على ق و ق عملية كعملية القاسم المشترك الأعظم بحيث لا تختلف عنها الا بتغيير علامات البواقي عند تنزيلها

منزلة

$ق = ق_1 خ_1 - ق_2$

$ق_1 = ق_2 خ_2 - ق_3$

$ق_2 = ق_3 خ_3 - ق_4$

$\vdots$

$ق_{ر-2} = ق_{ر-1} خ_{ر-1} - ق_{ر}$ .... (١)

$\vdots$

$ق_{م-2} \quad ق_{م-1} \quad - ق_{م}$

(ويمكن في عمليات القسمة المتوالية اجتنابا للكسور الكسرية بضرب كل واحد من التقاسيم في المضروب الرقمي الموافق له لكنه ينبغي ان تكون المضاريب الداخلة في العملية موجبة حتى لا تتغير علامات البواقي)

اذا تقرر هذا علم ان ملاحظة الدلالات ق و $ق_1$ و $ق_2$ و $ق_3$ قد وصلت المهندس سطورم الى النظرية الآتية وهي

نظرية

٣٨٧ اذا استعرض المتغير س في الدلالات

ق و $ق_1$ ...

$ق ، ق_1 ، ق_2 .... ق_{ن-1} ، ق_ن$

بعددين موجبين أو سالبين كالعددين ل ، ب فإذا كان ل أصغر من ب كان عدد مغايرات علامات الدالات المذكورة بالنسبة الى س = ب مساويا في النهاية لعدد مغايرات علامات تلك الدالات بالنسبة الى س = ل فإن كان أصغر منه كان الفرق بينهما مساويا للعدد الجذور الحقيقية المنسوبة للمعادلة ق = ٠ والمحصورة بين ل ، ب

وللبرهنة على هذه النظرية يلزم اختبار الكيفية التي بها يتغير عدد المغايرات المتكونة من علامات الدالات

$ق ، ق_1 ، ق_2 .... ق_ن$ المعلومة الرتبة بالنسبة لأي مقدار يعرض للمتغير س متى فرض لهذا المتغير جميع المقادير المتنوعة وحيث أنه لا يمكن حصول تغيير العلامات المفروضة عندما يأخذ س في الازدياد إلا بعد تغيير علامة واحدة من الدالات

$ق ، ق_1 ، ق_2$ ... وبناء على ذلك تكون هذه الدالة معدومة فنستنبط من ذلك حالتان ينبغي اختبارهما وذلك بحسب ما تكون الدالة المعدومة هي الدالة الأولى ق أو واحدة من الدالات

ق ، ق، ... لان الدلالة الاخيرة ق لاتكون معدومة

بأى ق يدل على عدد

الحالة الاولى

ولنختبر الآن التغير الواقع فى العلامات متى وصل المتغير س الآخذ فى الازدياد بالتدريج الى مقدار به تصير الدلالة ق مساوية للصفر أو زاد عن هذا المقدار فان وضع هذا المقدار المرموز للمتغير س بعد بيانه بالرمز حـ فى الدلالة المشتقة ق فانهذه الدلالة تؤول الى عدد موجب أو سالب حيث ان المعادلة ق = ٠ ليس لها بالفرض جذور متساوية فاذا جعل و رمزاً لكمية موجبة صغيرة بالكفاية بحيث لا يكون للمعادلة ق = ٠ جذر محصور بين حـ - و ، حـ + و فلا تتغير علامة الدلالة ق متى جعل س = حـ - و ، س = حـ و س = حـ + و

اذا تقرر هذا ورمز للمقدار ق بالرمز د(س) وللمقدار ق بالرمز دَ(س) نحصل بملاحظة ان د(حـ) = ٠

$$د(حـ - و) = -\frac{و}{١} دَ(حـ) + \frac{و^٢}{١×٢} دً(حـ) - \frac{و^٣}{١×٢×٣} دً'(حـ) + ...$$

وحيث

بحيث انه لاينجيب للكمية صغيرة و مقدار فيمكن جعل هذه الكمية صغيرة جدا بحيث يكون علامة تغيير المقدار
ءاد-و) ارتباط بعلامة حد ها الاول (كما في سند ٤٢٨) وحينئذ يكون المقدار ء(ه-و) متحدا في العلامة مع -و ءَ(ه)
وبناء على ذلك متخالفا في العلامة مع ءَ(ه) وحيث ان المقدارين ءَ(ه) و ءَ(ه-و) متحدان في العلامة فيكون المقداران
ء(ه-و) و ءَ(ه-و) متخالفين في العلامة واذا يكون المقداران
ق, ق١ متخالفين في العلامة بفرض س = ه-و
فاذا وضع + و بدل -و في تعبير المقدار السابق يحدث

$$ء(ه+و) = \frac{و}{١} ءَ(ه) + \frac{و^٢}{٢×١} ءً(ه) + \frac{و^٣}{٣×٢×١} ء‴(ه) + الخ$$

وحينئذ يشاهد ايضا ان المقدار ء(ه+و) متحد في العلامة مع المقدار ءَ(ه) وكذا مع المقدار ءَ(ه+و) وبناء على ذلك يكون المقداران ق, ق١ متحدين في العلامة بفرض

س = ه + و

ومن هنا يؤخذ بفرض س = ه انه اذا كان المقدار ءَ(س) او ق١ مسبوقا بعلامة + كان المقدار ق مسبوقا بعلام

بفرض س = حـ - و ومسبوقاً بعلامة + بفرض س = حـ + و
فان كان المقدار ق١ مسبوقاً بعلامة - بفرض س = حـ كان
المقدار ق مسبوقاً بعلامة + بفرض س = حـ - و ومسبوقاً
بعلامة - بفرض س = حـ + و كما يشاهد ذلك كله بالجدول
الآتي وهو

بفرض	س = حـ - و	ق̇ −	ق١ +	ق +	ق١ −
	س = حـ	٠ +		أو ٠	−
	س = حـ + و	+	+	−	−

وبناءً على ذلك اذا كان حـ جذراً للمعادلة ق = ٠ تكون
من علامتي المقدارين ق، ق١ مغايرة قبل أن يصل المتغير
س الى المقدار حـ وهذه المغايرة تكون مداومة بعد
أن يتجاوز هذا المتغير عن المقدار حـ المذكور
واما الدلالات الاخرى ق٢، ق٣، الخ فان كل واحدة منها
تكون كالدلالة ق١ مسبوقة في فرض س = حـ - و أو
س = حـ + و بالعلامة التي يلزم ان تكون مسبوقة بها في
فرض س = حـ اذا لم تنعدم واحدة ما من هذه الدلالات
في فرض

في فرض $س = ه$ مع الدلالة ق

ولنتصدى لاختبار ما يترتب حصوله عند ما تكون واحدة

من هذه الدلالات معدومة فنقول

الحالة الثانية

اذا فرض أن $ق_م$ هي الدلالة التي انعدمت من بين الدلالات

في فرض $س = ء$ يقال أن هذا المقدار المفروض للمتغير س

لا يمكن بواسطته جعل الدلالة $ق_{م-1}$ السابقة على الدلالة

$ق_م$ مساوية للصفر وكذا لا يمكن بواسطته جعل الدلالة

$ق_{م+1}$ التالية لهذه الدلالة مساوية للصفر لانه لو تأتى حصول

ذلك لقسم المضروب $س - ء$ في واحد كلاً من الباقيين

المتواليين $ق_{م-1}$, $ق_م$ أو $ق_م$, $ق_{م+1}$ وحينئذ يكون $س - ء$

مضروباً مكرراً في الكمية الكبرى للحدود ق وهذا محال لانه

قد فرض ان المعادلة $ق = .$ لا تكون لها جذور متساوية

وبناء على ذلك تؤول الدلالتان $ق_{م-1}$, $ق_{م+1}$ في فرض $س = ء$

الى عددين متخالفين في العلامة كما يتحقق ذلك بالتأمل في المعادلة

$$ق_{م-1} = ق_م ك_م - ق_{م+1}$$

التي هي من المعادلات (١) المتقدمة (في بند ٢٨٦) لانه ينتج من هذه المعادلة أن

ق$_{ر+١}$ = − ق$_{ر-١}$ عندما تكون ق$_ر$ = ٠

اذا تقرر هذا ووضع بدل س عددان كالعددين ء−و ، ء+و اللذين يختلفان عن ء اختلافاً يسيراً كان للدلالتين ق$_{ر-١}$, ق$_{ر+١}$ بالنسبة لهذين المقدارين المفروضين للمتغير س عين العلامتين اللتين تكون لهما في فرض س = ء لانه يمكن جعل و صغيراً بالكفاية بحيث لا تتغير علامة كلتا الدلالتين ق$_{ر-١}$, ق$_{ر+١}$ عندما يأخذ المتغير س في الزيادة من ء−و الى ء+و ومن هنا يؤخذ على أي وجه كانت علامة الدلالة ق$_ر$ في فرض س = ء−و لكونها موضوعة بين علامتي ق$_{ر+١}$, ق$_{ر-١}$ المتخالفتين انه يتكون دائماً من علامات الدلالات الثلاث المتوالية ق$_{ر-١}$, ق$_ر$, ق$_{ر+١}$ في فرض س = ء−و مداومة ومغايرة أو مغايرة ومداومة وبمثل ذلك يبرهن مهما كانت علامة الدلالة ق$_ر$ في فرض س = ء+و على انه لا يتكون من علامات الدلالات الثلاث

الدلالات $ق_١$ و $ق_٢$ و ..... و $ق_{ن}$ انعدام المغايرة الحادثة
من علامتي الدلالتين $ق$ و $ق_١$ وهذه المغايرة تستبدل بعداومة
وأما تغيير علامات الدلالات المتوسطة $ق_١$ و $ق_٢$ و ..... و $ق_{ن-١}$
فلا يترتب عليه زيادة عدد المغايرات ولا تنقيصه وبناءً على
ذلك اذا أُخِذَ عدد كالعدد ل موجب أو سالب وعدد آخر
أكبر منه كالعدد ے وفرض ان المتغير س لا يزال آخذاً
في الزيادة من ل الى ے فبقدر ما يوجد لهذا المتغير
من المقادير المحصورة بين ل و ے التي تصيرّ الدلالة
مساوية للصفر يكون من علامات الدلالات $ق$ و $ق_١$ و $ق_٢$
و $ق_{ن}$ في فرض س = ے مغايرات عددها بالأقل
عدد المغايرات المتكونة من العلامات في فرض س = ل
وحينئذ فهذه القاعدة هي عين النظرية التي يراد شرحها
وانما تختلف عنها في اللفظ فقط

تنبيه

يمكن ان تكون واحدة من الدلالات $ق_١$ و $ق_٢$ و ..... و $ق_{ن-١}$
معدومة إمّا في فرض س = ل أو في فرض س = ے وحينئذ

لا تعتبر في هذه الحالة غير مغايرات علامات جميع الدلالات وأما الدلالة التي انعدمت فيقطع النظر عنها لانه قد سبق انه اذا انعدمت الدلالة ق فرض س = ل واستعوض المتغير س بكمية تختلف عن ل بيسير فانه يكون دائمًا من علامات الدلالات ق ، ق ، ق مغايرة ومداومة وهذه المغايرة لا تنعدم عند قطع النظر عن علامة الدلالة ق

النتيجة الاولى

يمكن بواسطة النظرية السابقة معرفة عدد الجذور الحقيقية لمعادلة وذلك بأن يؤخذ بدل العددين اللذين يوضعان بدل س النهايات الكبريات للجذور الموجبة والسالبة أو كميات رقميات اكبر منهما ويمكن ايضًا قطع النظر عن كل استبدال لانه يمكن دائمًا ان يفرض للمتغير س مقدار كبير بالكفاية بحيث تكون كل واحدة من الدلالات ق ، ق ، ق ، ..... ، ق متحدة في العلامة مع حدها الأول (كما في نمرة ٤٧٤) وبنا على ذلك اذا لوحظت علامات الحدود الاول من الدلالات بفرض المتغير س سالبًا وعلامات هذه الحدود بفرض هذا المتغير موجبًا كانت

زيادة عدد مغايرات الجملة الاولى من العلامات عن عدد مغايرات الجملة الثانية منها هي عدد الجذور الحقيقية للمعادلة

النتيجة الثانية

لدلالات المساعدة ف ، ف ، ف ،......، ف عددها مساو في العادة للدرجة الميمية للمعادلة ف = ٠ لانه يشاهد من البحث عن القاسم المشترك الأعظم بين ق ، ق ان كل باق ينقص درجته في العادة بواحد عن درجة الباقي السابق عليه وكلما كان عدد الدلالات ف ، ف ، ... مساويًا للدرجة الميمية للمعادلة يمكن معرفة عدد الجذور التخيلية للمعادلة ق = ٠ وذلك بالنظر الى العلامات الحدود الأول من هذه الدلالات حينئذ يكون للمعادلة ق = ٠ ازواج من الجذور التخيلية بقدر ما يوجد من المغايرات في جملة علامات الحدود الأول من الدلالات المساعدة ف ، ف ، ... الى الدلالة الثانية ف وهذه القاعدة يمكن اثباتها بواسطة النتيجة الأولى وذلك لأنه يشاهد بمقتضى هذا الفرض ان احدى الدلالتين المتواليتين ف ، ف زوجية الدرجة والاخرى فردية الدرجة بحيث

يكون من علامات هاتين الدلالتين مداومة عند فرض المتغير
، موجبًا ان تكون من هذه العلامات مغايرة عند فرض هذا
المتغير سالبًا وبالعكس

من هنا يؤخذ انه يلزم لكي تكون جميع جذور المعادلة ق = ٠
حقيقية ان تكون الحدود الاول من الدلالات ق١ , ق٢ ، ... , ق٣
متحدة في العلامة

ولنطبق الآن نظرية المهندس استودم على بعض امثلة فنقول

المثال الاول

اذا فرضت المعادلة س٣ - ٧ س - ٥ = ٠ حدث

ق = س٣ - ٧ س - ٥ ٥

ق١ = ٣ س٢ - ٧

ويلزم لحساب الدلالة ق٢ ان تقسم الدلالة ق على ق١
ولتجنب الكسور نضرب الدلالة ق في ٣ فيتحصل من
ذلك الباقي -١٤ س - ١٥ وحينئذ يكون

ق٢ = ١٤ س + ١٥

ويلزم لحساب الدلالة ق٣ ان تقسم الدلالة ق١ على الدلالة

ولتجنب الكور تضرب الدلالة $ق_{١}$ فى ٤ كالباقى الذى $ق$ بدرجة اولى فيكون الباقى غير المشتمل على س مساويًا +٣٤٢٦

وحينئذ يكون

$$ق_{٢} = -٣٤٢٦$$

ومتى فرض المتغير س مقدار سالب تكونت من علامات الحدود الاول للدلالات ف، $ق_{١}$، $ق_{٢}$، $ق_{٣}$ جملة العلامات

− + − −

وهذه الحدود يتكون من علاماتها عند ما يفرض المتغير س مقدار موجب جملة العلامات

+ + + −

وحيث انه يتكون من الجملة الاولى من العلامات مغايرتان ومن الجملة الثانية مغايرة واحدة فلا يكون للمعادلة غير جذر حقيقى واحد (كما فى النتيجة الاولى من بند ٢٨٧) وحينئذ يكون هذا الجذر موجبًا لان الحد الاخير سالب (كما فى بند ٢٨١) ويكفى لتحصيل نهايتين للجذر ان توضع بدل المتغير فى الدلالة ف اعداد متنوعة وبناء على ذلك اذا فرض ان س = ٠ كانت هذه الدلالة سالبة وحيث انها تكون موجبة عند ما يفرض

ان

أنّ س = ١ + ٧‾‾٥ (كما في بند ٤٥٩) فيكون الجذر محصوراً

بين الصفر . و ٤ ويؤخذ من الفرض س = ٢ ناتج سالب

ومن الفرض س = ٣ ناتج موجب وحينئذ يكون الجذر محصوراً

بين ٢ و ٣ وسيأتي أنه يمكن بواسطة طرق بسيطة تحصيل

مقدار يقرب من المقدار الحقيقي بقدر ما يراد

ولما كان لا يترتب على حساب الدلالات ق، ق، ق صعوبة

في العمل وجب الاعراض عن ايراد ذلك هنا مفصلاً

المثال الثاني

اذا وضعت المعادلة س^٣ - ٧ س + ٧ = ٠ حدث

ق = س^٣ - ٧ س + ٧ و

ق١ = ٣ س^٢ - ٧ و

ق٢ = ٢ س - ٣ و

ق٣ = + ١

فان كان مقدار المتغير س سالباً تكونت من علامات الحدود

الاولى من الدلالات ق، ق١، ق٢، ق٣ جملة العلامات

- + - +

وان كان مقدار المتغير س موجبا تكونت ايضا من علامات هذه الحدود جملة العلامات

+ + + +

وحيث انه يتكون من جملة العلامات الاولى ثلاث مغايرات والثانية لا يتكون منها مغايرة تما فتكون جذور المعادلة الثلاثة حقيقية ولاجراء عملية استخراج الجذور يفرض بالتوالي ان س = −١٠ و −١ و ٠ و +١ و +١٠ فتكون علامات الدالات ——— ق , ق١ , ق٢ , ق٣ بالنسبة الى هذه المقادير المفروضة للمتغير س هي المشاهدة في الجدول

	ق	ق١	ق٢	ق٣
(−١٠)	−	+	−	+
(−١)	+	−	−	+
(٠)	+	−	−	+
(١)	+	−	−	+
(١٠)	+	+	+	+

ومن هنا يعلم أن المعادلة المفروضة لها جذر محصور بين −١ و ٠

وجذران محصوران بين ١ و ١٠

واذا فرض أن س = ٠ تكونت من ذلك جملة العلامات

(٢) ...... + + + +

ويؤخذ من مقارنة هذه الجملة بالجملة المتكونة من فرض س = ١ ان الجذرين الموجبين يكونان محصورين بين ١ , ٢ فاذا فرض أن س = ١,٥ كان للدلالة ق مقدار سالب وبناء على ذلك يكون أحد الجذرين الموجبين محصورًا بين ١ , ١,٥ والآخر بين ١,٥ و ٢

وأما الجذر السالب للمعادلة المفروضة فيحصل له نهايتان متقاربتان بقدر ما يراد وذلك بأن يوضع بدل المتغير في الدلالة ق وحدها اعداد متنوعة فان كانت الاعداد التي توضع بدل المتغير صحيحة كان الجذر محصورًا بين -٣ و -٤

واذا وضع المقدار س = ١,٥ في الدلالات الثلاث ق , ق١ , ق٢ انعدمت الدلالة الأخيرة وتكونت من ذلك جملة العلامات

(١,٥) .... - - ٠ +

فاذا قطع النظر في هذه الجملة عن علامة الصفر تكونت منها مغايرة

واحدة وحينئذ ينقص عدد مغايرات هذه الجملة مغايرة واحدة عن عدد مغايرات الجملة المتكونة من فرض س = ١ ويزيد عدد هذه المغايرات واحدة عن عدد مغايرات الجملة المتكونة من فرض س = ٠ وهذا موافق للتنبيه المتقدم (في صـ ٤٨٧)

المثال الثالث

اذا فرضت المعادلة س٤ − ٤ س٣ − ٣ س + ٢٣ = ٠ حدث

ق = س٤ − ٤ س٣ − ٣ س + ٢٣ ن

ق١ = ٤ س٣ − ١٢ س٢ − ٣ ن

ق٢ = ١٢ س٢ + ١٣٧١ ن

ق٣ = ٤٩١ س + ١٣٧١ ن .

ق٤ = − ٧١٥٧٩٣٢

وهاك جدول العلامات التي تأخذها هذه المشتقات بالنسبة للمقادير المتنوعة المفروضة للمتغير س

أما الصف الثالث والرابع فانهما يتكونان من فرض س = ١ و س = ١٠

بحينئذ يعلم بالتأمل في هذين الصفين ان المعادلة المفروضة

يكون لها جذران حقيقيان محصوران بين ١ و ١٠

وحيث أن جملة العلامات المتكونة من فرض س = ١٠ عين

الجملة المتكونة من علامات الحدود الأول لعدم الدلالات بفرض

مقدار موجب للمتغير س فلا توضع في المعادلة بدل هذا المتغير

أعداد تزيد من ١٠ وحينئذ يكون العدد ١٠ هو النهاية

الكبرى للجذور الموجبة للمعادلة المفروضة

وبناء على ذلك يكون للمعادلة جذران حقيقيان وجذران

تخيليان فاذا كتبت ايضا جملة العلامات المتكونة من فرض

س = ١ ثم كتبت جملتا العلامات المتكونتان من فرض

س = ٢ و س = ٣ شوهد أن أحد جذري المعادلة يكون

محصورا بين ٢ و ٣ والآخر اكبر من ٣ وحينئذ يمكن

تحصيل نهايات قريبة من النهاية ٣ هذه وذلك

بالاقتصار على الدلالة ق

المثال الرابع

ومن هنا ينتج أن

ﻫ (ن)   ٥ ٤ ع^٣ + ٧ ، لَ^٤ (ن)

وهذان الشرطان كافيان في العمل لانهما ان تحققا لم يحصل من علامات الحدود الأول للدلالات ف , ف٢ , ف٣ , ف٣ بالنسبة لمقدار موجب مفروض للتغير س غير مداومات

وبالجملة فانه يؤخذ من النتيجة الثالثة المتقدمة (في بند ٢٨٧) انهذين الشرطين ضروريان وكافيان في العمل

ومما ينبغي التنبيه عليه أن الشرط الأول داخل في الثاني لان الحد ٧ ، لَ^٤ لما كان دائماً موجباً كانت الكمية ٤ ع^٣ + ٧ ، لَ^٤ دائماً موجبة مالم يكن ٤ ع^٣ كمية سالبة

بند ٢٨٩ اذا كانت واحدة من الدلالات المساعدة كالدلالة ف المتوسطة بين ف , ف٢ مسبوقة دائماً بعلامة واحدة بالنسبة لسائر المقادير المفروضة للمتغير س التي تكون محصورة بين ل , ـــ فلاحاجة الى اعتبار الدلالات التالية لهذه الدلالة لانه يكفي لذلك ان يوضع العددان ل , ـــ بدل المتغير س في الدلالات ذات الدرجة العظمى هي

ق ن ق وق ن ق ... ق وتكون علامات النواتج

فيكون عدد الجذور ... الدالة ق = . المحصورة بين

ل و ى مساويًا للفرق ... يزيد به عدد مغايرات جملة

العلامات المتكونة من وضع العدد ل بدل المتغير س

عن عدد مغايرات جملة العلامات المتكونة من وضع العدد ى

بدل المتغير س

ويكفي لبيان هذه الخاصية انه ينبه على انه يمكن ان تطبق على

الجملة الجزئية للدلالات ق ن ق ن ...... ن ق البرهنة

التي تقدمت في الجملة الكلية للدلالات ق ن ق ن ق ن ... ق

ن ق ن ...... ق التي يرى أن الأخيرة منها دالة على عدد ثابت

والدلالة ق لا تزال مسبوقة في هذا الغرض بعلامة

واحدة بدون ان يكون لها مقدار ثابت بالنسبة للمقادير

التصاعدية المفروضة للمتغير س من ابتدا ل الى ى

وحيث أن جملة علامات الدلالات ق و ق و ق ن ...... ن ق

تنعدم منها مغايرة كلما انعدمت الدلالة ق وأن انعدام

الدلالات المتوسطة بين ق و ق لا يترتب عليه زيادة

عدد المغايرات ولا ننقصه فيكون للمعادلة ق = ٠ جذور
محصورة بين ل و ى بقدر المغايرات التي تزيد بها جملة
العلامات المتكونة من وضع العدد ى بدل المتغير س
عن جملة العلامات المتكونة من وضع العدد ل بدل المتغير
س وحيث ان النظرية السابقة قد صارت بسيطة كما هو شاهد
هنا فلا صعوبة في استعمالها لاننا اذا بحثنا عن القاسم المشترك
الأعظم بين ق و ق١ توصلنا الى كمية كثيرة الحدود كالكمية
ق٢ (ذات الدرجة الثانية مثلاً) التي اذا كانت مساوية
للصفر لم يتحصل منها للمتغير س غير مقادير تخيلية وحينئذ
لا حاجة الى توالى عمليات القسمة لان هذه الكمية الكثيرة الحدود
ق٢ لا تزال متحدة في العلامة مع حدها الأول بالنسبة لسائر
المقادير الحقيقية المفروضة للمتغير س وبناء على ذلك يمكن
أخذ تلك الكمية بدل الدلالة الأخيرة من الدلالات المساعدة
ق، ق١، الخ ويمكن ايضاً الاقتصار على كمية كثيرة الحدود كالكمية
ق٢ التي تنعدم بالنسبة لمقادير حقيقية تفرض للمتغير س
بشرط انه لا يتعذر تعيين جميع هذه المقادير لاننا اذا رمزنا

بالرموز

ع و ك ه ، ه الخ الى ما هو محصور من هذه المقادير بين ل و ے
وفرضنا ان هذه الرموز مرتبة بحسب عظمها وابتدانا بأصغرها
نحصل بواسطة القاعدة المتقدمة لمعادلة ق = ٠ عدد من
الجذور المحصورة بين ل ، ع - و (ن و هي كمية صغيرة بقدر
ما يراد) بقدر ما نحصل لها من الجذور المحصورة بين
ع + و ، ك - و أعني بين ع و ك (نجعل و كناية عن
عدد صغير بالكناية) وبقدر ما نحصل لها من الجذور
المحصورة بين ك ه ، وهلم جرا ونفرض ثانيا أن المقادير
ع ، ك ، ه ، الخ التي يترتب عليها انعدام الدلالة ق لا يترتب
عليها في آن واحد انعدام الدلالة ق

ويمكن ان يلاحظ انما اذا كانت الدلالة ق لا تزال
مسبوقة بعلامة واحدة بالنسبة للمقادير الصاعدية
المفروضة للمتغير س من ل الى ے كان عدد المغايرات
واحدا دائما عند ما يوضع بدل المتغير س العدد ل أو العدد
ے أو غيرهما من الأعداد المحصورة بين ل و ے في الجملة
الجزئية المتكونة من الدلالات ق ، ق ... ق لا تزال

على انعدام الدلالات المتوسطة وقوع تغيير في عدد مغايرات
هذه الجملة غيرانه يلزم اذا كان عدد المتغيرات يزيد عن
ما يستعوض المتغير س في هذه الدلالات بالعددين ل، ى
ان الدلالة ق تكون مسبوقة بعلامة واحدة بالنسبة التي
المتزايدة المفروضة للتغير س بالابتدا من ل الى ى
لان هذه القضية لا تتحقق الا في الحالة التي تكون فيها جميع
جذور المعادلة ق = ٠ حقيقية
بند وقد فرضنا الى هنا ان المعادلة المفروضة ق = ٠
٤٧١
ليس لها جذور متساوية غير ان النظرية المتقدمة (في بند ٤٨٧)
لا تزال مستعملة وان لم يتحقق هذا الشرط
ولبيان ذلك نفرض انه يكون للمعادلة جذور متساوية
وان نجرى على الكميتين ق، ق١ عملية مشابهة للعملية المتقدمة
(في بند ٤٨٦) فنتوصل الى باق كالباق ق ر يكون دلالة للمتغير س
وينقسم الباقي السابق عليه ق ر-١ قسمة بلا باق فاذا يكون
الباقي ق ر هو القاسم المشترك الاعظم بين ق و ق١
واذا يكون قاسما قسمة بلا باق لكل من البواقي المتوالية
ق٢

تحقق بها ايضاً المعادلة (١) المتقدمة (فى ...) شوهد انه

اخذ المتغير س فى الازدياد حتى وصل أو زاد عن مقدار كالمقدار

الذى به تنعدم الدلالة ق امكن انخارج قسمة ق/ق

من السلب الى الايجاب أو من الايجاب الى السلب أو انه يكون

ورئا العلامته الأصلية فأما فى الحالة الاولى وهى الانتقال

السلب الى الايجاب فان جملة علامات الدلالات ق، ق، ق

... ق يترتب عليها انعدام مغايرة من جهتها اليمنى وأما

فى الحالة الثانية وهى الانتقال من الايجاب الى السلب فانه يترتب

عليها زيادة مغايرة فى جهتها اليسرى وأما فى الحالة الثالثة

وهى أن الخارج يكون ملازماً العلامته الأصلية فان عدد مغايرات

جملة العلامات المذكورة لايتغير وحينئذ لاينشأ عن انعدام

واحدة من الدلالات المتوسطة بين الدلالتين ف و ق زيادة

ولانقص فى عدد المغايرات ومن هنا تستنبط النظرية الآتية

التى تستعمل بدل النظرية المتقدمة (فى ...) عندما تكون الدلالة

ق ليست مشتقة من الدلالة ق

وأما الفرق بين عدد مّا للدالة ق = . من الجذور المحصورة

لان الدلالات ف و ف و ق و ... لح المساوية بالتناظر الدلالات
ط و ط و ط و ... لح مضروبة فى ق تكون بالنسبة لمقدار
مخصوص مفروض فيها للتغير س متحدة فى العلامة مع الدلالات
ط و ط و ط و ... لح أو متخالفة معها فى العلامة بحسب ما تكون
الدلالة ق موجبة أو سالبة بالنسبة لهذا المقدار وبناء
على ذلك يكون عدد المغايرات المتحصلة من علامات الدلالات
ق و ق و ... لح بالنسبة لأى مقدار يفرض للتغير س مساويا
دائما لعدد المغايرات المتحصلة من علامات الدلالات ط و ط
و ط و ... لح

وحينئذ اذا فرض بالتوالى للتغير س فى الدلالات ق، ق، ق
و .... و ق المقداران ل و ى (بجعل ل أصغر من ى)
كان الفرق الذى يزيد به عدد المغايرات المتحصلة من فرض
س = ل عن عدد المغايرات المتحصلة من فرض س = ى
مساويا لعدد الجذور المختلفة للمعادلة ق = ٠ المحصورة
بين ل و ى وذلك بقطع النظر عن درجة تكرار كل جذر
منها ولنتصد لذكر واحدة من الملحوظات المتنوعة التى ابداها

المهندس

ف اذا اريد تعيين الجذور الحقيقية للمعادلة ق = ٠ مع مزيد الضبط في الطريقة التقريبية للمهندس نوتون

بند ٢٩٢ متى علم ان جذر معادلة محصور بين عددين كالعددين ل و ى وكان لا ينحصر بين هذين العددين الا جذر واحد فاسهل طريقة توصل الى اقرب مقدار لهذا الجذر هي ان يوضع على التوالى بدل المتغير في المعادلة اعداد اخر محصورة بين العددين المذكورين مثلا انا لو فرض انه وضع بدل المتغير عدد كالعدد لا المحصور بين العددين ل و ى علم من علامة الناتج هل الجذر محصور بين العددين ل و لا او بين العددين ى و لا فان كان محصورا بين العددين ى و لا فانه يوضع فيهما بدل المتغير كمية كالكمية ق ومن هنا يعلم هل الجذر محصور بين ى و ق او بين لا و ق وبتوالى العملية حصر الجذر بهذه المثابة يتوصل الى تقدير هذا الجذر بالتقريب المطلوب ومتى تحصل بالطريقة المذكورة مثل هذا التقريب سهل توالى العمل بالطريقة الآتية المنسوبة للمهندس نوتون وهي

ليفرض هنا انه يراد تحصيل مقدار يكون دون الجذر بمنزلة اعشارية

وحيث أن مقدار صَ المتحصل هو كية دون $\frac{١}{١٠٠}$ فتكون كلتا الكميتين صَ٢ و صَ٣ اقل من $\frac{١}{١٠٠٠٠}$ ولذا يحسب مقدار صَ الى $\frac{١}{١٠٠٠٠}$.

ثم يضاف الناتج الى الكية ب

فان كان مقدار س المتحصل مقرباً من $\frac{١}{١٠٠٠٠}$ فانه يستعمل بهذه المثابة في حساب مقدار تقريبي آخر وفي هذه الحالة تجرى عملية القسمة التقريبية الى الخانة الثامنة من الاعشار ثم يتوالى العمل على هذا المنوال ويضعف في كل عملية عدد اعشار مقدار س الى ان يتوصل الى درجة التقريب المطلوبة

وينبغي في العمل ان يلاحظ ان التقاريب المتوالية تعلم كلها من قانون واحد وحينئذ اذا وضع على العموم

$$ص = -\frac{د(س)}{د'(س)}$$

لزم في مبدأ الأمر ان يوضع ﺣ بدل س ثم يحسب مقدار ص الى $\frac{١}{١٠٠}$ ويضاف الناتج الى ﺣ فيتحصل من ذلك المقدار الثاني التقريبي للكية ﺣ ثم يوضع ﺣ بدل س ويحسب مقدار ص الى $\frac{١}{١٠٠٠٠}$ ويضاف الناتج الى ﺣ فيتحصل من ذلك المقدار الثالث التقريبي وهلم جرا

حينئذ ولكى تكون هذه الطريقة مضبوطة يلزم ان يتحقق انه اذا حد
مقدار ص ووضع بدله فى المعادلة فلا يكون للحد ودتحتويه
على ص و ص و لخ ارتباط بالاجزاء المائينية من مقدار الطرف دل
من هذه المعادلة وحيث أنه لا يتأتى مثل ذلك فى كثير من الأحوال
وانه ربما تحصل بدل المقدار التقريبى الذى يراد تحصيله للجذر
مقدار يبعد عن المقدار الحقيقى بكثير فيلزم حينئذ ان يحقق بعد كل
تقريب هل جميع الأعشار التى حسبت تنسب كلها للمقدار الجذر
المطلوب ام لا

فاذا لوحظ فى مبدإ الأمر المقدار ء الحادث من التقريب
الأول المبين برقمين اعشاريين فانه يلزم ان يوضع هذا
المقدار بدل المتغير فى المعادلة واذا علم بواسطة علامة الناتج
عند مقارنتها بعلامات النواتج الحادثة من الاستبدالات
التى اجريت فيما سبق ان الجذر اكبر من الكمية ء او اصغر منها
لزم أن يوضع فى المعادلة بدل المتغير $ء + \frac{1}{100}$ أو $ء - \frac{1}{100}$
فاما ان كان الناتج الحادث من هذا الاستبدال الثانى مخالفا
فى العلامة مع الاستبدال الأول فانه يثبت ان الكمية ء لا تختلف

عن الجذر الا بمقدار $\frac{1}{....}$ واما ان كان الناتجان متحدين في العلامة فانه يعلم من ذلك ان التقريب فيه خطأ أو أنه غير كاف وحينئذ يلزم لاستعمال الطريقة نوتون أن يبتداء بمقدار مقرب بقدر الامكان وذلك بان يبحث عن رقم الاجزاء المائينية بالمثابة المعروفة في اول البند السابق

وعلى هذا المنوال يجرى العمل في المقادير الحادثة من باقي التقاريب أعني انه يلزم بعد اجراء كل عملية ان يوضع في مبداء الامر بدل المتغير المقدار المتحصل ثم يوضع بدل المتغير ايضا هذا المقدار مضافا اليه أو مطروحا منه رقم آخر مرتبة فان كان لا يحصل من التقريب الثاني الذي يؤخذ فيه اربعة ارقام اعشارية مقدار مقرب من المقدار الحقيقي بكمية اقل من $\frac{1}{10000}$ قطع النظر عن الرقم الاعشاري الأخير وان كانت الارقام الباقية مضبوطة اجريت عليه تقريبا آخر ممتد الى $\frac{1}{1000000}$ لكنه يقطع النظر فيه بعد العمل عن رقم أو رقمين من الارقام الاعشارية وبالجملة فلا يلزم تحقيق كل تقريب على الفور لان طريقة الحساب تكفي في الاعمال غالبا لبيان التقاريب المحتوية على الخطأ أو لتصليح التقاريب

التي

النهايات كافية وبناء على ذلك اذا لم نطرح منها الزوائد أصول متناقصة أمكن الاقتصار في العمل على تحقيق عدد. وذلك بأن يحسب في مبدأ الأمر الارقام الاعشارية الكافية للمقدار التقريبي المطلوب

ولنمثل لذلك بالمعادلة

س٢ - ٢ س - ٥ = ٠

التي يشاهد بمقتضى ما تقدم انه لا يوجد لها غير جذر حقيقي واحد محصور بين ٢ و ٣ اذ بحسب هذه الطريقة تحصل

س = ٢,٠٩٤٥٥١٤٩

في الطريقة التقريبية للمهندس لاجرانج

بند ٩٥ الطريقة التقريبية للمهندس لاجرانج لا تؤخذ منها عين الفائدة التي تؤخذ من طريقة المهندس نيوتون من جهة الاختصار في الاعمال لكنها مجردة عن الخطأ

مثلاً اذا فرض أن ج و ج+١ كناية عن عددين متواليين محصور بينهما جذر واحد للمعادلة وفرض أن س = ج + $\frac{1}{ص}$ فان المعادلة الناتجة المحتوية على ص كالمعادلة تعطي جذراً أكبر من الو

ولا يوجد بين جذور هذه المعادلة الا جذر واحد اكبر من الواحد لانه لو كان الامر بخلاف ذلك لوجد للمتغير س عدة مقادير محصورة بين العددين المتواليين ح و ح + ١ وهذا مخالف للفرض وحينئذ يمكن تعيين الجزء الصحيح من مقدار ص بأن يوضع بالتوالي في المعادلة المحتوية على ص الاعداد الصحيحة ١ و ٢ و ٣ وهكذا الى أن يحصل ناتجان متخالفان في العلامة

ولذا فرض أن $ح_١$ و $ح_١ + ١$ كناية عن العددين اللذين يحدث منهما الناتجان المتخالفان في العلامة وجعل $ص = ح_١ + \frac{١}{ز}$ فان المعادلة الناتجة المحتوية على ز لا يكون لها غير جذر اكبر من الواحد وحينئذ يمكن تعيين الجزء الصحيح من مقدار ز بواسطة اجراء عملية مشابهة للعملية التي اجريت على ص فان كان هـ هو الجزء الصحيح من مقدار ز جعل $ز = هـ + \frac{١}{ى}$ وهلم جرا

وبناء على ذلك يتوصل بواسطة مثل هذه الحسابات الى مقدار للمتغير س يكون مبينا بالكسر المتسلسل

$$س = ح + \cfrac{1}{أ + \cfrac{1}{ع + ... }}$$

(٩٦) ويمكن حساب المعادلات المحولة المتوالية المحتوية على ص و ع و ز و ... بواسطة المشتقات المتقدمة (في ٢٥) وحيث ان المعادلة المفروضة مبينة بالصورة د(س) = ٠ فتكون المعادلة المتحصلة من فرض $س = ح + \frac{1}{ص}$ مبينة بالصورة

$$د(ح) + د'(ح)\frac{1}{ص} + \frac{د''(ح)}{2}\frac{1}{ص^2} + \frac{د'''(ح)}{2\times3}\frac{1}{ص^3} + ... = ٠$$

واذا احذفت المقامات بواسطة ضربها في $ص^م$ (و م هو نهاية عدد درجة المعادلة) فانه يتحصل من ذلك

$$د(ح)ص^م + د'(ح)ص^{م-1} + \frac{د''(ح)}{2}ص^{م-2} + \frac{د'''(ح)}{2\times3}ص^{م-3} + ... = ٠$$

واذا رمز للطرف الأول من هذه المعادلة بالرمز ه(ص) آلت المعادلة المحولة الى

$$ه(أ)ز^م + ه'(أ)ز^{م-1} + \frac{ه''(أ)}{2}ز^{م-2} + \frac{ه'''(أ)}{2\times3}ز^{م-3} + ...$$

ومثل ذلك يجري في باقي المعادلات المحولة

(٩٧) ومتى كان يوجد بين العددين ح و ح + ١ عدة جذو

للمعادلة المفروضة كان للمعادلة المحولة المحتوية على ص المتحصلة من فرض $س = م + \frac{1}{ص}$ عدة جذور اكبر من الواحد وحينئذ لا يكون وضع الاعداد الصحيحة ١، م، ٢ م الخ بدل ص كافيا لتعيين الاجزاء الصحيحة من مقادير ص لكن متى استخرجت الجذور بأى طريقة سهل دائماً معرفة العدد الذى يلزم ان تضرب فيه الجذور المحصورة بين تلك الاعداد الصحيحة لكي تتبدل بأعداد اخرى تكون اجزاؤها الصحيحة مختلفة عن بعضها وبهذه المثابة يتوصل دائماً لحساب المقادير التقريبية للجذور بواسطة طريقة لاجرانج الماسبق فاذا لم تكن فروق الجذور المحصورة بين العددين الصحيحين المتواليين م و م+١ كثيرة صغيرة فانه يمكن اجراء العملية على المعادلة المفروضة كما فى المثال الثانى

المثال الاول

٢٩٨ اذا فرضت المعادلة

$$س^٣ - ٢س - ٥ = ٠$$

شوهد أن هذه المعادلة ليس لها الا جذر حقيقى واحد محصور بين

بين ٢ و ٣ (كما تقدم في بند ...) فاذا فرض ان $ص = ٢ + \frac{١}{ض}$ حدث

$$د(٢) = ٢^٣ - ٢\times٢ - ٥ = -١ \quad ن$$

$$د'(٢) = ٣\times٢^٢ - ٢ = ١٠ \quad ن$$

$$\frac{١}{٢}\, د''(٢) = ٣\times٢ = ٦ .$$

$$\frac{١}{٢\times٣}\, د'''(٢) = ١$$

ومن هنا تؤخذ المعادلة المحولة

$$ض^٣ - ١٠ض^٢ - ٦ض - ١ = ٠$$

التي يشاهد فيها بالسهولة من غير اجراء عملية الاستبدال انه يحدث من $ض = ١٠$ ناتج سالب وحيث انه يحدث من $ض = ١١$ ناتج موجب (كما تقدم في بند ٥٠٦) فيكون مقدار المتغير ض محصورًا بين ١٠ و ١١ وحينئذ اذا فرض ان $ض = ١٠ + \frac{١}{ض'}$ حدث

$$هـ(١٠) = ١٠^٣ - ١٠\times١٠^٢ - ٦\times١٠ - ١ = -٦١ \quad ن$$

$$هـ'(١٠) = ٣\times١٠^٢ - ٢\times١٠\times١٠ - ٦ = ٩٤ \quad ن$$

$$\frac{١}{٢}\, هـ''(١٠) = ٣\times١٠ - ١٠ = ٢٠ \quad ن$$

$$\frac{١}{٢\times٣}\, هـ'''(١٠) = ١$$

ومن هنا تؤخذ المعادلة المحولة الثانية

$$٦١\,\text{ز}^{٣} - ٩٤\,\text{ز}^{٢} - ٢٠\,\text{ز} - ١ = ٠$$

التي يحصل منها مقدار موجب بفرض ز = ٢ وحينئذ يكون مقدار ز محصوراً بين ١ و ٢ وعلى ذلك اذا جعل $\text{ز} = ١ + \frac{١}{\text{و}}$ حدث

$$\text{ت}(١) = ٦١ \times ١^{٣} - ٩٤ \times ١^{٢} - ٢٠ \times ١ - ١ = -٥٤ \quad \text{و}$$

$$\text{ت}'(١) = ١٨٣ \times ١^{٢} - ١٨٨ \times ١ - ٢٠ = -٢٥ \quad \text{و}$$

$$\frac{١}{٢}\,\text{ت}''(١) = ١٨٣ \times ١ - ٩٤ = ٨٩ \quad \text{و}$$

$$\frac{١}{٢ \times ٣}\,\text{ت}'''(١) = ٦١$$

ومن هنا نأخذ المعادلة المحولة الثالثة

$$٥٤\,\text{و}^{٣} + ٢٥\,\text{و}^{٢} - ٨٩\,\text{و} - ٦١ = ٠$$

التي يعلم منها ان مقدار و محصور بين ١ و ٢ وبتوالي العمل على قدر الكفاية يشاهد أن الجذر المطلوب مبين بالكسر المتسلسل

$$\text{س} = ٢ + \cfrac{١}{١٠ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{٢ + \cfrac{١}{١ + \cfrac{١}{٣ + \cfrac{١}{١ + \text{الخ}}}}}}}}$$

دون الكسر

وهذا

إذا فرضت المعادلة

$$س^{٢} - ٢٨ س + ٥٦ = ٠$$

التي يلزم ان يكون لها جذران أحدهما محصور بين ٢ و ٣ والآخر بين ٣ و ٤

فاذا اجريت على هذه المعادلة عملية كعملية المثال السابق شوهد أن جذرها الأول مبين بالكسر المتسلسل

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{40+\text{الخ}}}}}$$

وبأخذ الآثلة الخامسة يستنتج من هذا الكسر مقدار مقرب من الجذر بأربعة أرقام اعشارية هو المقدار ٢،٧١٣٨

ويكون جذرها الثاني المحصور بين ٣ و ٤ مبينا بالكسر المتسلسل

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{9+\text{الخ}}}}}}}}$$

وبأخذ الآثلة السابعة يستخرج من هذا الكسر مقدار مقرب من الجذر بأربعة ارقام اعشارية هو المقدار ٣،٣٨٦٠

ومن هنا يؤخذ ان مقدارى الجذرين الموجبين من المعادلة المفروضة المقربين بأقل التقريب من $\frac{1}{...}$ يكونان محصورين بالمقدارين

١،٣٥٦٩ و ١،٦٩٢٠

واذا اريد حساب الجذر السالب يوضع – س بدل س في المعادلة المفروضة فتؤول الى

$$س^٣ - ٧س - ٧ = ٠$$

ومنها يحدث

$$س = ٣ + \cfrac{١}{٢٠ + \cfrac{١}{٣ + ...}}$$

ويمكن الاستغنا من حساب هذا الجذر الثالث لان مجموع الجذور لما كان معدوما كان المقدار المطلق للجذر السالب مساويا لمجموع الجذرين الموجبين

ويمكن ايضا حساب الجذرين الموجبين بدون أن يجرى فى المعادلة أدنى تحويل لان أحدهما محصور بين ١ و $\frac{٣}{٢}$ والآخر بين

٢ و ٥، فاذا فرض أن س = ١ + $\frac{١}{ص}$ كان المجهول ص مقدارًا موجبان أحدهما اكبر من ٢ والآخر محصور بين ١ و ٢ وحينئذ تكون المعادلة الحادثة من وضع ١ + $\frac{١}{ص}$ بدل س مبينة بالصورة ص٣ - ٤ ص٢ + ٣ ص + ١ = ٠ فان فرض أن ص = ١ كان الناتج موجبًا وان فرض أن ص = ٢ كان الناتج سالبًا وان فرض أن ص = ٣ كان الناتج موجبًا وبناء على ذلك يكون الجزء الصحيح من اكبر مقدارين من للمتغير ص هو ٢ واذا جعل ص = ٢ + $\frac{١}{ر}$ و ص = ١ + $\frac{١}{ر}$ تحصل من ذلك معادلتان محولتان يكون لكل واحدة منها جذر اكبر من الواحد

الباب الحادى عشر

فى طريقة الحذف المتعلقة بحل معادلتين بدرجة ما من المعادلات ذات المجهولين وفى المعادلة التفاضلية وفى صورة المعادلات ذات المجهولين

تنبيه اى معادلة ذات مجهولين بدرجة م ان كانت مرتبة بحسب واحد

التي بدرجة ثانية

هـ شَ + (ءُ + بِ ص) س + هـ + أ ص + ءِ صُ = ٠

سبند وحيث أن المعادلة لا تتغير بقسمة جميع حدودها على عدد واحد فيفرض أن مكرر واحد من حدود المعادلة (٢) كمكرر الحد الأول مثلا يساوي الواحد لكن اذا جعل هـ = ١ تغيرت الصورة العمومية للمعادلة لانها لا تكون حينئذ مشتملة على المعادلات ذات الدرجة م التي تكون محتوية على القوة الميمية للمجهول س

سبند فاذا التزم سين مكررات معادلة عمومية ذات مجهولين على وجه بحيث تتحصل من ذلك معادلة خصوصية تكون محققة للشروط المطلوبة فانه يمكن ان يفرض أن مكرر احد حدود المعادلة التي يراد تحصيلها يكون مساويا للواحد فان لم يسلم هذا الفرض كان واحد من المكررات المجهولة اختياريا وعندما تتحصل مقادير سائر المكررات التي تتعين بواسطة هذا المكرر الاختياري وتوضع في المعادلة العمومية يصير هذا المكرر الاختياري معروفا مشتركا في جميع الحدود فيحذف

ومن هنا يؤخذ أن عدد الشروط اللازمة لتعيين معادلة تامة مجهولة بدرجة م

م ذات مجهولين ينقص بواحد عن عدد مكررات المعادلة
فاعى ذلك يكون هذا العدد مبينا بالصورة
$\cdot \cdot + ٢ + ٣ + ٤ + \cdots + (م+١)$ أو $\frac{١}{٢}$ م $(م+٢)$
من أن احد المكررات المجهولة مـ و للواحد فلم تحصل مقادير باقى
ت اذ تكون المعادلة المطلوبة محتوية على حد مسبوق بمكرر
للغرض المتقدم فان تعذر الحصول على ذلك ترتب على هذا
جعل مقادير باقى مكررات غير محدوده و لذا يؤثر اجتناب
من قبيل العمل

ملحوظات فيما يتعلق بحل معادلتين من المعادلات
ذات المجهولين

. اذا اريد حل معادلتين من المعادلات المحتوية على المجهولين
ص وكان س داخلا فى واحدة منهما بدرجة اولى
باشرة استخراج مقدار س من هذه المعادلة بالنسبة
ن ثم بوضع هذا المقدار فى المعادلة الاخرى فتحدث من
معادلة تكون محتوية الا على ص وحينئذ اذا علمت
ر ص ووضعت على التوالى فى مقدار س المستخرج

بالنسبة الى ص تحصلت مقادير المتغير س المطابقة لهذه المقادير

ويمكن ايضا استعمال هذه الطريقة فى الحالة التى تكون فيها احدى المعادلتين

محتوية على المتغير س بدرجة ثانية وهذه المعادلة يتحصل منها

لهذا المتغير مقداران هما ج+√ك و ج-√ك (بجعل ج و ك

رمزين للدالتين المنطقتين للمتغير ص) فاذا وضع كل واحد

من هذين المقدارين بالتوالى فى المعادلة الثانية بدل المتغير س تحصلت

من ذلك معادلتان كلتاهما محتوية على ص وحينئذ تؤخذ

من حلها تين المعادلتين جميع مقادير ص المحققة للمعادلتين

المذكورتين وبناء على ذلك توضع المعادلة الحادثة من وضع ج+√ك

بدل المتغير س فى المعادلة الثانية من المعادلتين المفروضتين

بالصورة

(١) ..... ج + ب√ك = ٠

(بجعل ج و ك كناية عن دالتين منطقتين للمتغير ص)

وحيث ان المعادلة الحادثة من وضع ج-√ك بدل المتغير

لا تختلف عن المعادلة السابقة الا بعلامة الجزء غير المنطق فيحدث

(٢) ..... ج - ب√ك = ٠

فاذا ضربت هاتان المعادلتان في بعضهما طرفاً بطرف تحصلت من

ذلك معادلة مجردة عن العلامات الجذرية هي

(ع + ب√ك) (ع - ب√ك) = ٠ أي ع٢ - ب٢ ك = ٠

ويمكن لتحصيل جميع مقادير ص التي تحققها المعادلتان الاوليان

ان تحل هذه المعادلة الأخيرة وهذه المعادلة يمكن استنباطها

من المعادلتين (١) و (٢) لانه اذا حول في كل من هذه المعادلات

الجزء غير المنطق الى الطرف الثاني من كل معادلة ورفع كل منها الى الدرجة

الثانية حدث

ع٢ = ب٢ ك ومن هنا يحدث ع٢ - ب٢ ك = ٠

ومتى علمت مقادير ص تحصلت مقادير س بواسطة هذه

القاعدة وهي

بند ٧٠٢ اذا تحللت الاطراف الاول من المعادلتين المفروضتين

مضاريب منطقة بالنسبة للمجهولين آلت جملة هاتين المعادلتين

الى جملة أخرى أبسط منها ولبيان ذلك يرمز الى المفروضة

بالمعادلتين م = ٠ و ح = ٠ ويفرض أن م = ع عَ عً

و ح = ق قَ (بجعل ع و عَ و عً و ق قَ قً رموزا

للضاريب المنطقة بالنسبة للمجهولين س و ص) تتحصل من
الجملة م = ٠ و ع = ٠ بالبحث عن حلول الجمل المتنوعة الآتية

وهى

ع = ٠	ع′ = ٠	ع″ = ٠	ع‴ = ٠	ع″ = ٠	ع‴ = ٠
ق = ٠	ق′ = ٠	ق = ٠	ق′ = ٠	ق = ٠	ق′ = ٠

فاذا فرضت مثلاً المعادلتان

س٢ − ٢ ص س + ص٢ − ١ = ٠ و س٢ + ٢ س ص + ص٢ − ١٠ س − ١٠ ص
+ ٢١ = ٠

فانه يشاهد بالسهولة ان الطرف الأول من المعادلة الاولى يؤول الى

(س − ص)٢ − ١ أى (س − ص + ١) (س − ص − ١)

واذا اريد الوقوف على هذه الحقيقة وهى هل يمكن تحليل المعادلة الثانية الى مضاريب منطقة تحل هذه المعادلة بالنسبة الى س فيحدث

س = − ص + ٥ ± ٢

ومن هنا ينتج

س٢ + ٢ س ص + ص٢ − ١٠ س − ١٠ ص + ٢١ = (س + ص − ٧) (س + ص − ٣)

وحينئذ تحصل جميع حلول المعادلات المفروضة بواسطة حل هذه الجمل الاتية

س − ص + ١ = ٠	س − ص + ١ = ٠	س − ص − ١ = ٠	س − ص − ١ = ٠
س + ص − ٧ = ٠	س + ص − ٣ = ٠	س + ص − ٧ = ٠	س + ص − ٣ = ٠

بطريق التوالي

تنبيه اذا كانت الاطراف الاول من المعادلتين المفروضتين تحتوي
على مضروب مشترك تحققت المعادلتان بكل اثنين من المجاهيل
المجهولين التي يترتب عليها جعل هذا المضروب المشترك مساويا للصفر
وحينئذ يتحصل من ذلك عدد غير محدود من الحلول فان كان
المضروب المشترك لا يحتوي الا على س فبجعله مساويا للصفر توجد
منه معادلة ينتج منها عدد محدود من مقادير س يمكن
ان نضم اليها أي مقادير مفروضة للمتغير ص واذا كان المضروب
المشترك لا يحتوي الا على ص فانه ينتج منه مقادير معينة
للمتغير ص يمكن ان نضم اليها أي مقادير مفروضة للمتغير س
واذا كان المضروب المشترك مشتملا على المتغيرين س و ص
فبجعله مساويا للصفر تحدث منه معادلة يمكن ان نفرض فيها
لاحد المتغيرين مقادير اختيارية بها تتعين مقادير المتغير الآخر

بند ولنمثل المعادلتين اللتين يوجد بينهما مضروب مشترك لا يحتوى الا على واحد من المجهولين مثالاً هو

$(\text{ص}^{٢}-١)\,\text{س}^{٢}+(٢\,\text{ص}^{٣}-٢\,\text{ص})\,\text{س}+\text{ص}^{٤}-٢\,\text{ص}^{٢}+١=٠$ و

$(\text{ص}^{٢}-٣\,\text{ص}+٢)\,\text{س}^{٢}-\text{ص}^{٤}-٣\,\text{ص}^{٣}+٧\,\text{ص}^{٢}+١٥\,\text{ص}-١٨=٠$

فاذا اجرينا عملية الحسابات اللازمة لايجاد القاسم المشترك الأعظم بين المكررات المتنوعة لقوى س وبين الاجزاء التى لا تشمل على هذا المتغير فى المعادلة الاولى شوهد ان هذه الكميات تكون قابلة للقسمة على $\text{ص}^{٢}-١$ أو $(\text{ص}-١)(\text{ص}+١)$ وأن خارج قسمة الطرف الأول من المعادلة على $\text{ص}^{٢}-١$ يساوى $\text{س}^{٢}+٢\,\text{ص}\,\text{س}+\text{ص}^{٢}-١$ وان الطرف الأول من المعادلة الثانية يكون قابلاً للقسمة على الكمية ذات الحدود الثلاثة $\text{ص}^{٢}-٣\,\text{ص}+٢$ المكافئة للكمية $(\text{ص}-١)(\text{ص}-٢)$ وان خارج القسمة يساوى $\text{س}^{٢}-\text{ص}^{٢}-٦\,\text{ص}-٩$ وحينئذ يمكن وضع المعادلتين المعروضتين هكذا

$(\text{ص}-١)(\text{ص}+١)(\text{س}^{٢}+٢\,\text{ص}\,\text{س}+\text{ص}^{٢}-١)=٠$ و

$(\text{ص}-١)(\text{ص}-٢)(\text{س}^{٢}-\text{ص}^{٢}-٦\,\text{ص}-٩)=٠$

وهاتان المعادلتان تتحققان بوضع ص = ١ مع اى مقدار

مفروضة للتغير س

وتحصل باقى الحلول بواسطة الجمل الثلاث الآتية وهى

(١) ص +١ = ٠ و ش - ض - ٦ ص - ٩ = ٠ و

(٢) ص - ٢ = ٠ و ش + ٢ ص س + ض - ١ = ٠ و

(٣) ش + ٢ ص س + ض - ١ = ٠ و ش - ض - ٦ ص - ٩ = ٠

فأما الجملة الاولى فيحصل منها للمتغيرين ص و س اربعة مقادير

ص = - ١ و س = ٢ و ص = - ١ و س = - ٢

وأما الجملة الثانية فيحدث منها لها اربعة مقادير هى

ص = ٢ و س = - ١ و ص = ٢ و س = - ٣

وأما الثالثة فيمكن حلها بعمليات حسابية مشابهة للعمليات التى

اجريت فى المثال السابق بحيث يحصل منها للمتغيرين س و ص

اربعة مقادير هى

ص = - ١ و س = ٢ و ص = - ٢ و س = ١

٣٠٦ فاذا فرضت الآن المعادلتان

ش - ض - ٣ س ص + ٢ ض = ٠ و

٣ ش - ٢ س ص - ض = ٠

شوهد مباشرة انه يمكن وضع المعادلة الاولى بالصورة

$(س - ص)(س^{٢} + س ص + ص^{٢} - ٣ص) = ٠$ والثانية بالصورة

$٢س^{٢} - ٢س ص + س^{٢} - ص^{٢} = ٠$ أو $(س - ص)(٣س + ص) = ٠$

ومن هنا يؤخذ ان $س - ص = ٠$ فيكون للمعادلتين عدد غير محدود من الحلول

ويلزم لتحصيل باقي الحلول ان تحل المعادلتان

$س^{٢} + س ص + ص^{٢} - ٣ص = ٠$ و $٣س + ص = ٠$

فيحصل من ذلك للمتغيرين س و ص مقداران احدهما $س = ٠$

و $ص = ٠$ (وهذان المقداران هما من حلول المعادلة $س - ص = ٠$)

ومقداران آخران هما $س = \frac{٩}{٧}$ و $ص = \frac{٢٧}{٧}$

في الطريقة العمومية المتعلقة بحل معادلتين

رقيتين بمجهولين

٢٠٧ بند اذا فرضت معادلتان بدرجة ما ومجهولين كالمجهولين

س و ص وكان $س = ل$ و $ص = ى$ حلا مشتركا

بين هاتين المعادلتين وعوضا عن وضع ل بدل س و ى

بدل ص وضع ى بدل ص فتحصلت من ذلك معادلتان

لا تشتمل الا على المتغير ص وهاتان المعادلتان تكونان محققتين

بالمقدار ص = ل ولذا يكون للطرفين الاولين من المعادلتين

قاسم مشترك مشتمل على المضروب ص - ل وحينئذ يقال

اذا علمت معادلتان بمجهولين لزم لكي يكون أي مقدار اختياري

مفروض لواحد من المجهولين كالمجهول ص مثلا محققا لهاتين

المعادلتين انه اذا وضع هذا المقدار في المعادلتين كان للطرفين

الاولين قاسم مشترك هو دلالة للمجهول الآخر س وبالعكس

اذا كان للطرفين الاولين من المعادلتين بعد استبدال مقدار

ص قاسم مشترك هو دلالة س كان هذا المقدار المفروض

للمتغير ص يكون محققا للمعادلتين فاذا جعل هذا القاسم المشترك

مساويا للصفر تحصلت من ذلك معادلة جذورها هي المقادير

المطابقة للمجهول الآخر س

٣٠٨ بند وبنا على ذلك يلزم لتحصيل الحلول المشتركة بين المعادلتين

المفروضتين ان تجري على طرفيهما الاولين بمقتضى القاعدة الـ...

العمليات التي يراد اجراؤها عليهما اذا اريد ايجاد قاسمهما الـ...

الأعظم

فاذا رمز الى هاتين المعادلتين بالصورتين ج = ٠ ، م = ٠

وفرض أن درجة م بالنسبة الى س لا تزيد عن درجة ج

وأمكن اجراء عملية قسمة ج على م وكان الخارج انقسم خاليًا

عن المقامات المحتوية على ص بحيث لا يقتضى اجراء عملية تصلح بحتو هذا الشرط وجعل ع رمزًا للخارج و ف رمزًا للباقى

حدث

ج = م ع + ف

ومن هذه المتساوية يؤخذ ان جميع مقادير المجهولين المستخرجة من

المعادلتين ج = ٠ و ف = ٠ تكون محققة للمعادلة ف = ٠

لان الخارج ع لا يكون غير محدود فى فرض المقادير المحدودة

للمجهولين س ، ص وبمثل ذلك يبرهن على ان جميع المقادير المحققة

للمعادلتين م = ٠ و ف = ٠ تكون محققة ايضًا للمعادلة ج = ٠

وحينئذ يمكن استبدال المعادلتين ج = ٠ و م = ٠ بالمعادلتين

م = ٠ و ف = ٠ البسيطتين عنهما بين المعادلتين اللتين

درجة طرف احداهما وهو ف أقل من درجة طرف الاخرى وهو

م بالنسبة الى س

ولا يتأتى مثل ذلك اذا كان الخارج ع محتويًا على مقامات مشتملة

على ص

[illegible] الصفر بخلاف الخارج فانه يعمم

[illegible] يكون الحد م₁ × ع مقدار

[illegible] بشرط ان لا يكون ق مساويًا للصفر

[illegible] الكمية م على الكمية م₁ اللتين

[illegible] اسمها ان نضرب الكمية الكبيرة

[illegible] فى [illegible] لنحصل على ص فاذا رمزنا لهذا المضروب

بالرمز [illegible] وللخارج الذى نحصل بعد اجراء عملية التصليح بالرمز ع

ولنرمز [illegible] بالرمز ق [illegible]

هـ م = م₁ ع + ق

ومن هذه المتساوية يؤخذ أن حلول المعادلتين م₁ = ٠ و ق = ٠

لا تختلف عن حلول المعادلتين هـ م = ٠ و م₁ = ٠ وحينئذ

تنقسم هاتان المعادلتان الى جملتين آخريين هما

م = ٠ و م₁ = ٠ و هـ = ٠ و م₁ = ٠

وبناء على ذلك تكون المعادلتان م₁ = ٠ و ق = ٠ متحققتين

بجميع حلول المعادلتين المفروضتين وتحققان ايضًا بجميع حلول

المعادلتين هـ = ٠ و م₁ = ٠ التى ربما كانت غير

محققة للمعادلة م = ٠

وأما المعادلتان م = ٠ و ق = ٠ فيجرى عليهما عملية مشابهة
للعملية التى أُجريت على المعادلتين ح = ٠ و م = ٠ وبهذه
المشابهة تتحصل معادلتان احداهما ق = ٠ والاُخرى دونها
فى الدرجة بالنسبة الى س وهاتان المعادلتان تحققان بجميع
حلول المعادلتين م = ٠ و ق = ٠ وبحلول الجزى غير هذه
وبتوالى العمل هكذا يتوصل دائماً الى معادلتين احداهما غير محتوية
على س فاذا تعينت جميع حلول هاتين المعادلتين تحصلت من
ذلك جميع حلول المعادلتين المفروضتين وكذا حلول المعادلات الحادثة
من اجراء عملية التصليح على المقاسيم المتوالية

بند ٣٠٩ فان وجدت فى الطرفين الاولين من المعادلتين المفروضتين
مضاريب لا تشتمل الا على ص اختصرت العملية بحذف هذه المضاريب
لكنه ينبغى ملاحظة الحلول التى يمكن تحصيلها من هذه المضاريب
كما تقدم (فى بندى ٣٠٣ و ٣٠٤) ثم تحذف ايضاً من البواقى
المتوالية المضاريب التى لا تشتمل الا على ص وتلاحظ الحلول
المتحصلة منها

$$(\text{ع}_2 \neq \text{٥})$$

$$(\text{٦}) \cdots\cdots \frac{\text{ه}_1 \text{ه}_2 \text{ه}}{\text{م}\,\text{م}_1\,\text{م}_2}\,\text{ح}_1 = \text{ع}\,\text{ر}_1 + \text{ع}_2\,\text{ر}_2\,\frac{\text{ك}_2}{\text{م}_2}$$

فاذا ضربت المعادلة (٥) فى ه واستعوض $\text{ه}\,\text{ر}$ بالطرف الثانى من المعادلة الثالثة من المعادلات (١) فانها تؤول الى

$$\frac{\text{ه}_1 \text{ه}_2}{\text{م}\,\text{م}_1}\,\text{ح}_1 = \text{ر}_1 \left(\text{ح}_1 \text{ك}_2 + \text{ح}_2\,\text{ه}_2\,\frac{\text{ك}_2}{\text{م}_1}\right) + \text{ح}_1\,\text{ح}_2\,\text{ر}_2$$

وبمثل ما تقدم يبرهن على ان المكرر ر_1 يكون قابلاً للقسمة على م_2 وحينئذٍ اذا جعل ع_2 رمزاً للخارج القسمة حد —

$$(\text{٧}) \cdots\cdots \frac{\text{ه}_1 \text{ه}_2 \text{ه}}{\text{م}\,\text{م}_1\,\text{م}_2}\,\text{ح}_1 = \text{ع}_2\,\text{ر}_1 + \text{ع}_1\,\text{ر}_2\,\frac{\text{ك}_2}{\text{م}_2}$$

ويؤخذ من المعادلتين (٦) و (٧) ان جميع المقادير المفروضة للمتغيرين س و ص التى تؤول بها الكميتان الكبيرتا الحدود ر_1 و $\frac{\text{ك}_2}{\text{م}_2}$ الى الصفر يترتب عليها ايضاً انعدام الطرفين الاولين منها تين المعادلتين وحيث ان $\frac{\text{ه}_1 \text{ه}_2 \text{ه}}{\text{م}\,\text{م}_1\,\text{م}_2}$ و $\frac{\text{ك}_2}{\text{م}_2}$ اوليات معاً فتكون جميع حلول المعادلتين $\text{ر}_1 = ٠$ و $\frac{\text{ك}_2}{\text{م}_2} = ٠$ محققة للمعادلتين $\text{ح}_1 = ٠$ و $\text{ح}_1 = ٠$ المفروضتين

فأما المعادلة التى يحدث منها ارتباط بين ح و ر_2 و $\frac{\text{ك}_2}{\text{م}_2}$ فانها تحصل من ضرب المعادلة (٦) فى ه واستعواض $\text{ه}\,\text{ر}_2$ بالطرف الثانى من المعادلة الرابعة من المعادلات (١) وبهذه

(١١) .... $ج_١ ج - ع_١ ء = - ب_١ \frac{ر ر_١}{م م_١}$

واذا اريد حذف $ب_١$ من المعادلتين (٦) و (٧) تضرب المعادلة (٦) فى $ء_١$ والمعادلة (٧) فى $ج_١$ ثم نطرح احدى المعادلتين الناتجتين من الاخرى فيحدث

$(ع ء_١ - ج ج_١) ب_١ + (ع_١ ء_١ - ج_١^٢) ب_٢ \frac{ر_٢}{م_٢} = ٠$ وبوضع $ب_١ \frac{ر ر_١}{م م_١}$ بدل $ع ء_١ - ج_١ ج$ وحذف المضروب $ب_١$ يحدث

(١٢) .... $ج_٢ ج - ع_١ ء = ب_٢ \frac{ر ر_١ ر_٢}{م م_١ م_٢}$

وبهذه المثابة تحصل المعادلة

(١٣) .... $ج_٣ ج - ع_٣ ء = - \frac{ر ر_١ ر_٢ ر_٣}{م م_١ م_٢ م_٣}$

ويؤخذ من المعادلة (١٣) هذه أن أى مقادير مفروضة للمتغيرين س و ص ومحققة للمعادلتين $ج = ٠$ و $ء_١ = ٠$ تكون محققة ايضاً للمعادلة $\frac{ر ر_١ ر_٢ ر_٣}{م م_١ م_٢ م_٣} = ٠$ وهذا يقتضى أن أحد المضاريب $\frac{ر}{م}$ و $\frac{ر_١}{م_١}$ و الخ يكون معدوماً

ومن هنا يعلم أن مقادير المتغير ص تؤخذ من المعادلات

$\frac{ر}{م} = ٠$ و $\frac{ر_١}{م_١} = ٠$ و $\frac{ر_٢}{م_٢} = ٠$ و $\frac{ر_٣}{م_٣} = ٠$

اذا تقرر هذا وفرض أن $س = ل$ و $ص = ى$ كناية عن المقادير المضبوطة

المضبوطة للمعادلتين ج=٠ و ب=٠ يقال

اذا كان المقدار ص=ـه جذراً للمعادلة ي/م=٠ كان المقداران

س=ل و ص=ـه محققين للمعادلتين ب=٠ و ي/م=٠

وان كان المقدار ص=ـه لا يحقق المعادلة ي/م=٠ وكان

جذراً للمعادلة ي١/م١=٠ عُلم من المعادلة (١٠) ان المعادلة

ر=٠ تحقق بالمقدارين س=ل و ص=ـه وبناء على ذلك

يكون هذان المقداران محققين للمعادلتين ر=٠ و ي١/م١=٠

وان كان المقدار ص=ـه لا يحقق واحدة من المعادلتين ي/م=

و ي١/م١=٠ وكان جذراً للمعادلة ي٢/م٢=٠ عُلم من المعادلة

(١١) ان المعادلة ر١=٠ تحقق بالمقدارين س=ل و ص=ـه

وبناء على ذلك يكون هذان المقداران محققين للمعادلتين ر١=٠ و ي٢/م٢

وان كان المقدار ص=ـه لا يحقق واحدة من المعادلات الثلاث

ي/م=٠ و ي١/م١=٠ و ي٢/م٢=٠ وكان جذراً للمعادلة ي٣/م٣=

عُلم من المعادلة (١٢) ان المعادلة ر٢=٠ تحقق بالمقدارين

س=ل و ص=ـه وبناء على ذلك يكون هذان المقداران محققين

للمعادلتين ر٢=٠ و ي٣/م٣=٠

وحينئذ تكون جميع المقادير المحققة للمعادلتين ج = ٠ و ح = ٠ من جملة المقادير المحققة للمعادلات (٢)

ويطلق على المعادلة $\frac{مر \cdot م_{١}ر_{١} \cdot م_{٢}ر_{٢} \cdot م_{٣}ر_{٣}}{م \cdot م_{١} \cdot م_{٢} \cdot م_{٣}} = ٠$ التي تحصل منها جميع مقادير ص اسم المعادلة الانتهائية بالنسبة الى ص

ولنوضح ذلك بمثالين فنقول

المثال الاول

$$س^{٣} + ٢ص\,س^{٢} + (٢ص^{٢} - ص + ١)\,س + ص^{٣} - ص^{٢} + ٢ص = ٠ \quad و$$

$$س^{٢} + ٢ص\,س + ص^{٢} - ص = ٠$$

القسمة الاولى

$س^{٣} + ٢ص\,س^{٢} + (٢ص^{٢} - ص + ١)\,س + ص^{٣} - ص^{٢} + ٢ص$	$س^{٢} + ٢ص\,س + ص^{٢} - ص$
$-س^{٣} - ٢ص\,س^{٢} - (ص^{٢} - ص)\,س$	$س + ص$
$ص\,س^{٢} + (٢ص^{٢} + ١)\,س + ص^{٣} - ص^{٢} + ٢ص$	
$-ص\,س^{٢} - ٢ص^{٢}\,س - ص^{٣} + ص^{٢}$	
$س + ٢ص$	

القسمة الثانية

$س^{٢} + ٢ص\,س + ص^{٢} - ص$	$س + ٢ص$
$-س^{٢} - ٢ص\,س$	$س$
$ص^{٢} - ص$	

وحيث

وحيث انه لم يحصل تصليح فى المقاسيم ولم يحذف من البواقى مضروب ما فتحصل جميع حلول المعادلتين المفروضتين بواسطة المعادلتين

س + ٢ ص = ٠ و ص^2 − ص = ٠

اللتين تؤخذ منها المقادير الأربعة

ص = ٠ و س = ٠ و ص = ١ و س = −٢

وحينئذ تكون المعادلة ص^2 − ص = ٠ هى المعادلة الانتهائية بالنسبة الى ص

المثال الثانى

س^3 + ٢ ص س^2 + ٢ ص (ص − ٢) س + ص^2 − ٤ = ٠ و

س^2 + ٢ ص س + ٢ ص^2 − ٥ ص + ٢ = ٠

وأما القسمة الاولى فانه يؤخذ منها الباقى (ص − ٢) س + ص^2 − ٤ أو (ص − ٢)(س + ص + ٢) ثم يحذف المضروب ص − ٢ ويقسم الطرف الاول من المعادلة الثانية على س + ص + ٢ فيكون الباقى وهو ص^2 − ٥ ص + ٦ غير محتو على المتغير س وحينئذ تحصل جميع حلول المعادلات المفروضة بواسطة حل المعادلات

(١).... ص − ٢ = ٠ و س^2 + ٢ ص س + ٢ ص^2 − ٥ ص + ٢ = ٠ و

(٤) .... ص٢ – ٥ص + ٦ = ٠ و س + ص + ١ = ٠

فأما المعادلات (١) فتؤخذ منها المقادير ص = ١ و س = ٠ و ص = ١ و س = – ٤ وأما المعادلات (٢) فتحصل منها المقادير ص = ١ و س = – ٤ و ص = ٣ و س = – ٥

وأما المعادلة الانتهائية بالنسبة الى ص فانها تحصل من ضرب اطراف المعادلتين ص – ١ = ٠ و ص٢ – ٥ص + ٦ = ٠ في بعضها

في المعادلات التفاضلية

~~بند~~ قد تقدم (في بند ٢٨٦) انه يمكن اجراء عملية استخراج الجذور غير المنطقة لمعادلة رقمية وذلك بان يجري العمل في مبدأ الامر على معادلة اخرى تكون جذورها هي الفروق بين جذور المعادلة المفروضة مأخوذة مثنى ولنتصدى الآن لبيان كيفية تكوين هذه المعادلة فنرمز الى المعادلة المفروضة بالرمز

(١) .... د (س) = ٠

ونجعل ا و ب و ﺣ و .. و ل رموزاً لجذورها المبينة فاذا فرض في مبدأ الامر انه اريد تحصيل معادلة تكون جذورها هي الفروق بين الجذر ا وبجذور اخرى عددها م – ١

ثم ان نجعل س = س − ح فيكون
ووضع ح + ص بدل س في المعادلة د(س) = ٠ فيكون

$$د(ح+ص) = ٠$$

او انه يحصل بمقتضى عملية التحليل (كما في ص ٢٢٥)

$$د(ح) + د'(ح)ص + د''(ح)\frac{ص^٢}{١×٢} + د'''(ح)\frac{ص^٣}{١×٢×٣} + الخ = ٠ \quad (٢)$$

وحيث ان ح بالفرض جذر للمعادلة (١) فتكون د(ح) معدومة وبناء على ذلك تكون المعادلة (٢) قابلة للقسمة على ص ويكون لها جذر معدوم وهذا الجذر المعدوم حادث عن التفاضل ح − ح لانه بمقتضى الارتباط ص = س − ح يشاهد ان مقادير ص هي الفروق بين الجذر ح وسائر جذور المعادلة (١) بما فيها من الجذر ح وبحذف هذا الجذر المعدوم تؤول المعادلة الى

$$د'(ح) + د''(ح)\frac{ص}{١×٢} + د'''(ح)\frac{ص^٢}{١×٢×٣} + الخ = ٠$$

وحينئذ تكون جذور هذه المعادلة هي الفروق بين الجذر ح والجذر م − ١ للمعادلة المفروضة

فاذا وضع في المعادلة المذكورة ز بدل ح تحصلت من ذلك معادلة تكون جذورها هي جميع الفروق بين الجذر ز وجذو

٣-١ للمعادلة المفروضة واذا وضع فيها ه بدل ز حدثت من
ذلك معادلة تكون جذورها هي جميع الفروق بين الجذر ه
والجذور م-١ للمعادلة المفروضة وهلم جرا
ومن هنا يؤخذ ان جذور المعادلة المفروضة الموفقة مثنى هي
مقادير ص الحادثة من وضع كل من هذه الجذور بدل س
في المعادلة

(٣) $د'(س) + د''(س)\frac{ص}{١×٢} + د'''(س)\frac{ص^٢}{١×٢×٣} + ... = ٠$

وهذا راجع الى حل كلتا المعادلتين (١) و (٣)
وبناء على ذلك اذا حذف س من المعادلتين (١) و (٣) كانت
المعادلة الانتهائية بالنسبة الى ص هي المعادلة المطلوبة
وحيث ان المعادلة المفروضة بدرجة م فتكون المعادلة
التفاضلية بدرجة م (م-١) لان عدد جذورها يساوي
عدد التراتيب التي يمكن تكوينها من الحروف ه ز و ه الماخوذة
مثنى التي عددها م
والمعادلة التفاضلية لا تحتوي الا على قوى زوجية للمجهول
لانها تحتوي في آن واحد بكل من الجذرين ه - ز و ز - ه

(٥٤٧)

وبناء على ذلك يكون كل اثنين من جذورها متساويين وبينهما تخالف

في العلامة

فاذا فرض أن م (م-١) = ٢ ن وكانت المعادلة متناسبية

موضوعة بالصورة

$$ص^{ن} + ب_1 ص^{ن-٢} + ب_2 ص^{ن-٤} + \cdots\cdots + ب_ن = ٠$$

امكن جعل $ص^{٢} = ع$ وحينئذ يحدث

$$ع^{ن} + ب_1 ع^{ن-1} + ب_2 ع^{ن-٢} + \cdots\cdots + ب_ن = ٠$$

وحيث ان جذور هذه المعادلة هي مربعات فروق جذور واحدها د ة

المفروضة فيطلق عليها بهذا السبب اسم معادلة مربعات التفاضل

وتستعمل المعادلة التفاضلية (كما في بند ٨٥) في تعيين

بند ٣١٢

كية دون اصغر فرق بين جذور معادلة مفروضة ولذا يبحث

عن النهاية الصغرى للجذور الموجبة للمعادلة التفاضلية وهذه

النهاية هي الكمية المطلوبة

ويمكن ايضا ان يبحث عن النهاية الصغرى لجذور معادلة مربعات

التفاضل فيكون الجذر التربيعي لهذه النهاية هو الكمية

الصغيرة المطلوبة وبهذه المثابة تحصل ثانيا النهاية الكبرى

فإذا كانت [illegible] معادلة مربعات التفاضلات

جذورها حقيقية موجبة [illegible] تكون تامة وغير محتوية على

مداومات (ويعرف أن المعادلة المفروضة لا تكون لها جذور

متساوية حتى لا يكون للمعادلة التفاضلية جذر معدوم)

وإذا كانت معادلة مربعات التفاضلات تامة وكانت محتوية

على مغايرات فقط كانت جذور المعادلة المفروضة كلها حقيقية

لأنه إذا كان لها جذران تخيليان كالجذرين ن + ش $\sqrt{-1}$

ن − ش $\sqrt{-1}$ كان مربع تفاضل هذين المقدارين −٤ش² وحينئذ

يؤخذ من ذلك أن معادلة مربعات التفاضلات يكون لها جذر

سالب وحيث أنها تامة فتكون محتوية على مداومة وهذا مخالف

للغرض فإذا أجريت الطريقة المتقدمة (في بند ٢١١) على المعادلة

العمومية ذات الدرجة الثالثة

$$س^3 + ع س + ك = ٠$$

يوجد أن معادلة مربعات التفاضلات هي

$$ص^3 + ٦ع ص^2 + ٩ع^2 ص + ٤ع^3 + ٢٧ك^2 = ٠$$

ومن هنا يؤخذ أن الشرطين الضروريين الكافيين لجعل جذور

المعادلة المعز وصنة حقيقية هما ع < ٠،٥٤٩ ع^٣ + ٠،٧ ك^٣ د وهذا (٥٤٩)

موافق لما ذكر (في بند ٢٨٨)

الباب الثاني عشر

في القواسم ذات الدرجة الثانية وتنقيص درجة المعادلات والمعادلات العكسية والمعادلات ذات الحدين والمعادلات ذات الحدود الثلاثة والمعادلات المحتوية على المجهول تحت علامة الجذر

في القواسم ذات الدرجة الثانية

بند ٤٩٥ لتعرض المعادلة

$$س^{م} + ح_{١} س^{م-١} + ح_{٢} س^{م-٢} + ح_{٣} س^{م-٣} + \ldots\ldots = ٠$$

فاذا اريد تحصيل القواسم ذات الدرجة الثانية للطرف الاول من هذه المعادلة فانه يرمز لواحد من هذه القواسم بالكمية ذات الحدود الثلاثة

$$س^{٢} + ع س + ك$$

لانه اذا اجريت عملية قسمة الطرف الأول من المعادلة على $س^{٢} + ع س + ك$ تحصل من ذلك باقٍ بدرجة اولى محتوٍ على س وهذا الباقي يرمز له بالكمية $ع س + ك$ (بجعل ع و ك كاسة

عن الكميتين المشتملتين على المكورين المجهولين ى , ك ويلزم لكي تكون الكمية ذات الحدود الثلاثة سً + ع س + ك من قواسم الطرف الاول من المعادلة المفروضة ان يكون الباقي ع١ س + ك١ معدومًا وحيث أن س غير معين فيكون ع١ = ٠ و ك١ = ٠ وحينئذ نعلم من المقادير المتحصلة لكل من ع , ك بواسطة هاتين المعادلتين جميع القواسم ذات الدرجة الثانية للمعادلة المفروضة .

وحيث ان عدد القواسم ذات الدرجة الثانية ½ م (م-١) (كما في بند ٤٤٢) فاذا حذف ع أو ك من المعادلتين ع١ = ٠ و ك١ = ٠ كانت المعادلة الانتهائية من المعادلات ذات الدرجة ½ م (م-١) وحيث ان هذا العدد اكبر من م فان زاد م عن ٣ كان تعيين القواسم ذات الدرجة الثانية اصعب منه

المعادلة المفروضة

بند ٤١٦ ويمكن استعمال البحث عن القواسم ذات الدرجة الثانية في تعيين الجذور التخيلية لاي معادلة ولذا يكفي ان يعين كل من المقدارين الحقيقيين لكل من ع , ك المحققين للمعادلتين ع١ = ٠ و ك١ = ٠ فنتحصل من ذلك جميع القواسم الحقيقية

ذات الدرجة الثانية للمعادلة المفروضة وبجعل كل من هذه
القواسم مساوياً للصفر تتعين الجذور التخيلية لهذه المعادلة
فان وجد لكل من ع و ك مقداران منطقان محققان للمعادلتين
ع = ٠ و ك = ٠ سهل تعيينهما ومن هنا نعلم جميع القواسم المنطقة
ذات الدرجة الثانية للمعادلة المفروضة وحينئذٍ يؤول حل هذه
المعادلة الى حل معادلة دونها في الدرجة و الى حل جملة معادلات
بدرجة ثانية

بند ٢١٧ ولنمثل للطريقة المذكورة بأمثلة فنفرض في مبداء الامر المعادلة

(١) ...... س^٣ + ح س + د = ٠

التي اذا قسم طرفها الأول على س^٢ + ع س + ك تحصل من ذلك
الباقي (ع^٢ − ك + ح) س + ع ك + د
وحينئذٍ يلزم وضع المعادلتين

ع^٢ − ك + ح = ٠ و ع ك + د = ٠

اللتين اذا حذف منهما ك حدثت هذه المعادلة

(٢) .... ع^٣ + ح ع + د = ٠

وحيث ان هذه المعادلة لا تختلف عن المعادلة (١) الا بكونه قد وضع
فيها

فيها حـ بدل ع فتكون مقادير ع جذور المعادلة المفروضة

ولمزيد ايضاح ذلك نجعل ل ، ن ، ب ، لا رموز الجذور المعادلة

(١) فتكون المتواسم المطلوبة هي

(س - ل) (س - ب) ، (س - ل) (س - لا) ، (س - ب) (س - لا)

وحينئذٍ تكون مقادير ع هي

- (ل + ب) ، - (ل + لا) ، - (ب + لا)

وحيث أن المعادلة المفروضة مجردة عن الحد الثاني فيكون

ل + ب + لا = ٠

ومن هنا ينتج

- (ل + ب) = لا ، - (ل + لا) = ب ، - (ب + لا) = ل

بند ٢١٨ ثم نفرض ايضاً المعادلة

(٣) ..... $س^٤$ + حـ $س^٢$ + ء س + هـ = ٠

التي اذا قسم طرفها الاول على $س^٢$ + ع س + ك نحصل الباقي

(ء - حـ ع + ٢ ع ك - $ع^٣$) س + هـ - حـ ع + $ك^٢$ - $ع^٢$ ك

وحينئذٍ يلزم وضع المعادلتين

(٤) $ع^٣$ - ٢ ع ك + حـ ع - ء = ٠ ، (٥) $ك^٢$ - (حـ + $ع^٢$) ك + هـ = ٠

اللتين يحصل من احداهما

$$(٦) \ldots\ldots \quad ك = \frac{ع^٣ + ح ع - ء}{٢ ع}$$

وبوضع هذا المقدار في المعادلة الاخرى يحدث

$$(٧) \ldots\ldots \quad ع^٦ + ٢ ح ع^٤ + (ح^٢ - ٤ هـ) ع^٢ - ء^٢ = ٠$$

وهذه المعادلة بدرجة سادسة لكن حيث انها لا تحتوى الا على قوى زوجية للمجهول ع فتؤول الى معادلة بدرجة ثالثة بفرض $ع^٢ = ز$ ويسهل ادراك هذا التحويل لان مقادير ع الستة يتكون من مجموع كل اثنين منها أربعة جذور للمعادلة المفروضة وحيث أن مجموع هذه الجذور معدوم فيكون مجموع كل اثنين منها مساويًا لمجموع الاثنين الآخرين ومخالفًا معه في العلامة وحينئذ لا تكون المعادلة التي يتعين بها ع مشتملة الا على قوى زوجية للمجهول

فاذا اجريت مثل هذه العملية على المعادلة التامة

$$س^٤ + ح س^٣ + ء س^٢ + هـ س + و = ٠$$

فانه يحصل من ذلك لتعيين ع معادلة بدرجة سادسة تكون تامة ايضًا لكنه يبرهن بالسهولة على انه اذا احذف الحد الثاني

أي معادلة حقيقية المكررات تكون مشتملة دائماً على مضاريب
حقيقية بدرجة ثانية في المعادلة ذات الدرجة الرابعة وذلك
بقطع النظر عن النظريات العمومية التي سبق اثباتها في هذا الموضوع
فاذا كان $ء = 0$ آلت المعادلة (٤) الى

$$ع^{3} - 2عك + حع = 0$$

وحينئذٍ تتحقق كلتا المعادلتين (٤) و (٥) إمّا بوضع

$$ع = 0 \quad و \quad ك^{2} - (ح + ع^{2})ك + هـ = 0$$

أو بوضع

$$ع^{2} - 2ك + ح = 0 \quad و \quad ك^{2} - (ح + ع^{2})ك + هـ = 0$$

فأما المعادلتان الأوليان فيؤخذ منهما أن

$$ك = \tfrac{1}{2}ح \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}ح^{2} - هـ}$$

وأما المعادلتان الأخريان فيؤخذ من احداهما

$$ك = \frac{ح + ع^{2}}{2}$$

وبوضع هذا المقدار في المعادلة الاخرى يحدث

$$ع^{4} + 2حع^{2} + ح^{2} - 4هـ = 0$$

فاذا كان $ح^{2} - 4هـ > 0$ تعين بالقانون $ك = \tfrac{1}{2}ح \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}ح^{2} - هـ}$ مقداران

امكن وضع المعادلة الناتجة بالصورة

$$ص^{٣} + ز^{٣} + ٣\,(ص\,ز + ع)\,(ص + ز) + ٢\,ك = ٠$$

وهذه المعادلة تتحقق بوضع

$$ص\,ز + ع = ٠ \quad و \quad ص^{٣} + ز^{٣} + ٢\,ك = ٠$$

وهاتان المعادلتان تؤخذ منهما

$$ص^{٣}\,ز^{٣} = -\,ع^{٣} \quad و \quad ص^{٣} + ز^{٣} = -\,٢\,ك$$

ومن هاتين المعادلتين ينتج أن $ص^{٣}$ و $ز^{٣}$ يكونان جذرين للمعادلة

$$ط^{٢} + ٢\,ك\,ط - ع^{٣} = ٠$$

وحينئذ يحصل

$$ص^{٣} = -\,ك + \sqrt{ك^{٢} + ع^{٣}} \quad و \quad ز^{٣} = -\,ك - \sqrt{ك^{٢} + ع^{٣}}$$

وحيث أن $س = ص + ز$ فيكون فاذن مقادير $س$ مبينًا بالصورة

$$س = \sqrt[٣]{-\,ك + \sqrt{ك^{٢} + ع^{٣}}} + \sqrt[٣]{-\,ك - \sqrt{ك^{٢} + ع^{٣}}} \quad \ldots\ldots (٢)$$

فاذا قطع النظر عن المقادير الجبرية الموجودة تحت العلامات الجذرية فانه لا يتحصل من المعادلة (٢) الا مقدار واحد للمتغير $س$ الا انه لما كان للجذر التكعيبي ثلاثة مقادير تحصل

للمتغير

للتغير من مجموع الـ ... مقادير متنوعة وهذه
المقادير ليست كلها محققة للمعادلة ... المفروضة لانه يلزم أن
مقادير ص و ز تكون محققة للمعادلتين ص ز = − ع
و ص^٣ + ز^٣ = − ٢ ك وحيث ان الاولى منهما بين المعادلتين
قد استعوضت بالمعادلة ص^٣ ز^٣ = − ع^٣ وكان لكل كمية ثلاثة
جذور تكعيبية فيكون للمعادلة ص^٣ ز^٣ = − ع^٣ بالنسبة لحاصل
الضرب ص ز ثلاثة مقادير متنوعة وحينئذ اذا رمز
لجذري الواحد التكعيبيين التخيليين بالرمزين ل و ل^٢ (كما
سيأتي في بند ٣٤٢) كانت مقادير ص ز الثلاثة المتطابقة
مع ص^٣ ز^٣ = − ع^٣ هي ص ز = − ع و ص ز = − ع ل
و ص ز = − ع ل^٢

وبناء على ذلك تؤخذ من المعادلة (٢) جذور ... من المعادلة
(١) والمعادلتين الحادثتين من وضع ع ل أو ع ل^٢ بدل ع
وحيث أن ع كمية حقيقية فيلزم ان تعطى المسئلة في القانون
(٢) عن جميع توافيق مقادير الجذر التكعيبي التي يكون حاصل ضربها
تخيليًا

فان كانت الكمية $ك^٢ + ع^٣$ موجبة كان لكل جذر تكعيبى مقدار حقيقى ولنرمز على وجه الاختصار للمقدار الحقيقى المفروض للجذر التكعيبى الأول بالرمز جـ وللمقدار الثانى بالرمز ء فتكون المقادير الثلاثة للجذر الأول هى جـ و ل جـ و $ل^٢$ جـ والمقادير الثلاثة للجذر الثانى هى ء و ل ء و $ل^٢$ ء وحينئذ اذا ضربت بطريق التوالى الكميات الثلاث الأول فى الكميات الثلاث الأخر ولوحظ أولا أن ل و $ل^٢$ مقداران تخيليان وثانيا ان $ل^٣ = ١$ و $ل^٢$ تخيلى لانه لما كان $ل^٣ = ١$ كان $ل^٤ = ل$ ثم وجد انه لا يتحصل غير ثلاثة حواصل حقيقية هى جـ × ء و ل جـ × $ل^٢$ ء و $ل^٢$ جـ × ل ء ومن هنا يؤخذ انه لا يكون للمتغير س الا المقادير الثلاثة هذه

$$جـ + ء \quad و \quad ل جـ + ل^٢ ء \quad و \quad ل^٢ جـ + ل ء$$

فأما المقدار الأول فهو حقيقى وأما المقداران الآخران فهما تخيليان

وقد تقدم أن المعادلة لا يزيد عدد جذورها عن درجتها

ولنمثل لذلك بالمعادلة

$$س^٣ - ٦ س - ٩ = ٠$$

وحيث ان

وحيث أن ... = ... ك = − ... فيكون $\sqrt{ك^{٢} + ع^{٣}} = \frac{٧}{٢}$

ومن هنا يحصل

$$م = \sqrt[٣]{-ك + \sqrt{ك^{٢} + ع^{٣}}} = \sqrt[٣]{\frac{١٦}{٢}} = ٢$$

$$ن = \sqrt[٣]{-ك - \sqrt{ك^{٢} + ع^{٣}}} = \sqrt[٣]{\frac{٢}{٢}} = ١$$

وحينئذ تكون الجذور الثلاثة هي

$$س = ٣$$

$$س = -١ + \frac{١}{٢}\sqrt{٣}\sqrt{-١} = \frac{١}{٢}\left(-٢ + \sqrt{٣}\sqrt{-١}\right) = \frac{١}{٢}\left(-٣ + \sqrt{٣}\sqrt{-١}\right)$$

$$س = -١ - \frac{١}{٢}\sqrt{٣}\sqrt{-١} = \frac{١}{٢}\left(-١ + \sqrt{٣}\sqrt{-١}\right) = \frac{١}{٢}\left(-٣ - \sqrt{٣}\sqrt{-١}\right)$$

ولاشك أن مقادير المتغير س الثلاثة هذه تتحقق بها المعادلة المفروضة وان كانت الكمية ع سالبة كانت الكمية $ك^{٢} + ع^{٣}$ سالبة وحينئذ تكون الجذور التكعيبية الداخلة في المعادلة (ى) غير محتوية على مقدار حقيقي لكنه لا يلزم ان يؤخذ من ذلك انه لا يكون للمعادلة المفروضة الا جذور تخيلية لانه قد تقدم ان الجذور تكون في هذه الحالة كلها حقيقية وينبغي تخليص هذه الجذور من المعادلة (ى) ان تجرد هذه المعادلة عن الجذور التخيلية وذلك لا يتأتى الا اذا تعين كل جذر تكعيبي بجملة عدد جذورها

غير محدود وهذا هو المعروف بالحالة غير المنطقة للمعادلة ذات الدرجة الثالثة

ولنمثل لهذه الحالة بالمعادلة

$$س^{٣} - ٢١ س + ٢٠ = ٠$$

التي يحصل منها عند جعل ع = -٧ و ك = ١٠ في المعادلة (٢)

$$س = \sqrt[٣]{-١٠ + ٩\sqrt{-٣}} + \sqrt[٣]{-١٠ - ٩\sqrt{-٣}}$$

وبناء على ذلك يتحقق بالسهولة ان المعادلة المفروضة لها ثلاثة جذور حقيقية لانها تحقق إذا وضع فيها بدل المتغير س كل من الاعداد ١ و ٤ و -٥

وان كانت الكمية $ك^{٢} + ع^{٣}$ موجبة كان القانون (٢) غير كاف أيضا لانه ربما تحصل منه للجذر الحقيقي مقدار محتو على علامات جذرية مع أن الجذر يكون منطقا

ولنمثل لذلك بالمعادلة

$$س^{٣} - ٦ س - ٤٠ = ٠$$

التي يحصل منها عند جعل ع = -٢ و ك = -٢٠ في القانون (٢)

$$س = \sqrt[٣]{٢٠ + ١٤\sqrt{٢}} + \sqrt[٣]{٢٠ - ١٤\sqrt{٢}}$$

وحينئذ

وحينئذ يكون الجذر الحقيقي مبيناً بصورة غير منطقة مع أنه منطق لأن المعادلة المفروضة تتحقق بفرض $س = ٤$

ولكي يستنتج من القانون (٧) المقدار المبسوط للجذر عندما يكون منطقاً يلزم أن تجرى على كل من الجذور التكعيبية الداخلة في المعادلة عملية تحويل مشابهة للعملية التي أجريت على المقدار $\sqrt{ح + \sqrt{ى}}$ وهذا التحويل له ارتباط بالبحث عن الجذر المنطق لمعادلة بدرجة ثالثة

فإذا كان $ك^{٢} + ع^{٣} = ٠$ كانت كل واحدة من الكميتين المبينتين بالرمزين ح و ء مساوية للمقدار الحقيقي المفروض للجذر $\sqrt[٣]{-ك}$

وحيث أن $ل + ل^{٢} = -١$ فيكون

$$ح + ء = ٢\sqrt[٣]{-ك} ، \quad ح ل + ء ل^{٢} = -\sqrt[٣]{-ك} ، \quad ح ل^{٢} + ء ل = -\sqrt[٣]{-ك}$$

وحينئذ تكون الجذور الثلاثة للمعادلة حقيقية ويكون اثنان منها متساويين

في الحل العمومي للمعادلات ذات الدرجة الرابعة

ســ ٣٤٠ الأعمال التي سبقت (في ســ ٣١٨) توصل إلى الحل العمومي لمعادلة ذات الدرجة الرابعة

ولذا إذا فرضت المعادلة

(١) ...... $س^٤ + حـ س^٢ + ء س + هـ = ٠$

وجعل $ع^٢ = ز$ في المعادلة (٧) المتقدمة (في ص [illegible]) آلت هذه المعادلة ذات الدرجة الرابعة الى

(٢) ...... $ز^٣ + ٢ حـ ز^٢ + (حـ^٢ - ٤ هـ) ز - ء^٢ = ٠$

وحيث ان هذه المعادلة بدرجة ثالثة فيمكن تحصيل المقادير العمومية لجذورها بالمثابة المتقدمة (في ص [illegible]) لانه اذا رمز الى هذه الجذور بالرموز ز′ و ز″ و ز‴ كانت مقادير ع هي $\pm \sqrt{ز'}$ و $\pm \sqrt{ز''}$ و $\pm \sqrt{ز'''}$ لكنه يمكن ان تكون مقادير ع هذه مبينة بالجذور الأربعة للمعادلة (١) لانه اذا رمز الى هذه الجذور بالرموز ل و ى و لا و ط . ولوحظ ان مجموعها معدوم كانت مقادير ع الستة هي

$\pm (ل + ى)$ و $\pm (ل + لا)$ و $\pm (ل + ط)$

وحينئذ يكون

$ل + ى = \pm \sqrt{ز'}$ ، $ل + لا = \pm \sqrt{ز''}$ و $ل + ط = \pm \sqrt{ز'''}$

ومن هنا يوجد بملاحظة القانون $ل + ى + لا + ط = ٠$ أن

(٣) ...... $ل = \pm \sqrt{ز'} \pm \sqrt{ز''} \pm \sqrt{ز'''}$

وحيث

وحيث أن ح كناية عن واحد من الجذور الأربعة للمعادلة (١) فتؤخذ
هذه الجذور الأربعة من المعادلة (٢) ولما كانت المعادلة (٢)
لا تحتوى الا على مربع ى لم تتغير اذا أخذت المعادلة
ش + ح ش - ى س + هـ = ٠ بدل المعادلة (١) وحينئذ تؤخذ
ايضاً الجذور الأربعة لهذه المعادلة من المعادلة (٢) لانه يشاهد
بالنسبة الى العلامتين ± الموضوعتين امام كل علامة جذرية ان
مقدار ل يتعين بثمانية أوجه ويلزم لاستخراج جذور
المعادلة ش + ح ش - ى س + هـ = ٠
ان ينبه على انه اذا ضربت الكميات الثلاث ل + ب و ل + لا و ل + ط
في بعضها تحصل منه ذلك حاصل ضرب يكون مركباً من مجموع حواصل
ضرب الجذور ل و ب و لا و ط ثلاث ثلاث مضافاً اليه الكمية
ل + ل ب + ل لا + ل ط وحيث أن هذه الكمية معدومة
لكونها تؤول الى ل (ل + ب + لا + ط) فيؤخذ من ذلك
ان الحاصل (ل + ب) (ل + لا) (ل + ط) يساوى مجموع حواصل
ضرب الجذور ل و ب و لا و ط ثلاث وحيث أن هذا
المجموع يساوى - ى فلا يدخل في المعادلة (٣) غير توافيق

علامات العلامات الجذرية المحققة لهذا الشرط وهو ان حاصل
ضرب هذه العلامات الجذرية يكون متحدًا في العلامة مع ء
فاذا فرض ان طرق تعيين الجذور الثلاثة المبينة بالمقادير
$+\sqrt{\text{ز}'}$ ، $+\sqrt{\text{ز}''}$ ، $+\sqrt{\text{ز}'''}$ مكيفة الوضع بحيث يكون حاصل
ضربها متحدًا في العلامة مع ء فتكون الجذور الأربعة للمعادلة
المفروضة مبينة هكذا

$$
(٤)\cdots\cdots
\begin{cases}
+\sqrt{\text{ز}'} + \sqrt{\text{ز}''} - \sqrt{\text{ز}'''} \\
+\sqrt{\text{ز}'} - \sqrt{\text{ز}''} + \sqrt{\text{ز}'''} \\
-\sqrt{\text{ز}'} + \sqrt{\text{ز}''} + \sqrt{\text{ز}'''} \\
-\sqrt{\text{ز}'} - \sqrt{\text{ز}''} - \sqrt{\text{ز}'''}
\end{cases}
$$

وبناء على ذلك يكون واحد من جذور المعادلة (٢) موجبًا
لان احدها الاخير سالب ويكون جذراها الآخران متحدين في
العلامة لان حاصل ضرب الجذور الثلاثة موجب ويمكن ان
يكون هذان الجذران تخيليين

ويؤخذ من المعادلة (٣) انه اذا كانت الجذور الثلاثة للمعادلة
(٢) موجبة كانت جميع جذور المعادلة (١) حقيقية ولا يمكن

ان

ان تكون جميع جذور المعادلة (١) هذه حقيقية ما لم تكن الجذور الثلاثة للمعادلة (٢) موجبة لان جذور المعادلة (٢) عبارة عن مربعات حواصل جمع كل اثنين من جذور المعادلة (١) وحينئذ اذا كانت جميع جذور المعادلة (١) حقيقية كانت حواصل جمع كل اثنين من هذه الجذور حقيقية ايضاً وبناء على ذلك تكون مربعات حواصل الجمع هذه موجبة.

فاذا كانت الجذور ز′ و ز″ و ز‴ موجبة كان حاصل الضرب $(+\sqrt{ز'})(+\sqrt{ز''})(+\sqrt{ز'''})$ موجباً وحينئذ لا تكون المقادير (٤) موافقة الا في الحالة التي يكون فيها ى موجباً فقط اما اذا كان ى سالباً فانه يلزم في هذه المقادير تغيير اشارة واحدة من العلامات الجذرية

واذا فرض الآن ان الجذرين ز″ و ز‴ موجبان فانه يمكن في هذه الحالة وضع $ر\sqrt{-1}$ و $ك\sqrt{-1}$ بدل علامتي الجذر $+\sqrt{ز''}$ و $+\sqrt{ز'''}$ وحيث ان ر و ك هنا كناية عن كميتين موجبتين فيؤول حاصل الضرب $(+\sqrt{ز'})(+\sqrt{ز''})(+\sqrt{ز'''})$ الى $-ر ك \sqrt{ز'}$

ولكي يكون هذا الحاصل متحدا في العلامة مع ء يلزم ان نعين $+\sqrt{\text{ز}'}$
على وجه بحيث يكون متخالفا في العلامة مع ء وبهذه المثابة تكون
الجذور الأربعة مبينة هكذا

$$+\sqrt{\text{ز}'} + (\text{ر} - \text{ك})\sqrt{-1}$$
$$+\sqrt{\text{ز}'} - (\text{ر} - \text{ك})\sqrt{-1}$$
$$-\sqrt{\text{ز}'} + (\text{ر} + \text{ك})\sqrt{-1}$$
$$-\sqrt{\text{ز}'} - (\text{ر} + \text{ك})\sqrt{-1}$$

وهذه الجذور الاربعة تكون تخيلية ما لم تكن $\text{ر} = \text{ك}$ لان المقدارين
الاولين يؤولان حينئذ الى الكمية الحقيقية $\sqrt{\text{ز}'}$
واذا فرض أن الجذرين $\text{ز}''$ و $\text{ز}'''$ تخيليان كان

$$\text{ز}'' = \text{ر} + \text{ك}\sqrt{-1} \quad \text{و} \quad \text{ز}''' = \text{ر} - \text{ك}\sqrt{-1}$$

وبناء على ذلك يمكن وضع مقداري $\sqrt{\text{ز}''}$ هكذا $\pm(\text{م} + \text{ء}\sqrt{-1})$
ومقداري $\sqrt{\text{ز}'''}$ هكذا $\pm(\text{م} - \text{ء}\sqrt{-1})$ (كما سيأتي في بند ٢٤٠)
واذا أخذ بدل $+\sqrt{\text{ز}''}$ و $+\sqrt{\text{ز}'''}$ المقداران

$$\text{م} + \text{ء}\sqrt{-1} \quad \text{و} \quad \text{م} - \text{ء}\sqrt{-1} \quad \text{حدث} \quad (+\sqrt{\text{ز}''})(+\sqrt{\text{ز}'''}) = \text{م}^2 + \text{ء}^2$$

وحينئذ يلزم ان يكون حاصل الضرب $(+\sqrt{\text{ز}'})(+\sqrt{\text{ز}''})(+\sqrt{\text{ز}'''})$
متحدا

متحدًا في الاشارة مع ه $\sqrt{ب}$ + $\sqrt{ر}$ على وجه بحيث يكون

متحدًا في المقدار مع ه وبصورة مشابهة تكون الجذور الاربعة

مبينة هكذا

$-\sqrt{ن} + \text{م} - \text{ه} - \sqrt{ن} - \text{م} + \text{ه} + \sqrt{ر} + \text{ه}\sqrt{-1} + \text{ه} + \sqrt{ر} - \text{ه}\sqrt{-1}$

وأما الجذران الاولان فهما حقيقيان وأما الجذران الاخران فهما

تخيليان

ومما ينبغي التنبيه عليه ان المعادلة (ب) هي المعروفة بآلة المعادلة (١)

في تنقيص درجة المعادلات

٣٤٣ قد شوهد فيما تقدم ان اي معادلة محتوية على جذور متساوية تنقسم الى عدة معادلات اخرى دونها في الدرجة

ولذا يقال ان هذه المعادلة تكون قابلة لتنقيص درجتها

ويمكن ايضًا تنقيص درجة المعادلة متى علم ان بعض جذورها تتحقق به شروط مخصوصة

٣٤٤ فاذا فرض انه يوجد بين ح و و اللذين هما من جذور المعادلة د(س) = ٠ ارتباط مبين بالمعادلة

ع ح + ك و = ر ....(١)

نبين الحيث أن ح و و جذور للمعادلة د(س)=٠ فحينئذ
د(ح)=٠ و د(و)=٠ واذا وضع في المعادلة د(و)=٠
مقدار و المستخرج من المعادلة (١) آلتالى د((ر−ع ح)/ك)=٠
وحينئذ تكون الكمية ح محققة لمعادلتين د(س)=٠ و د((ر−ع س)/ك)=٠
معًا وبناءً على ذلك يوجد للطرفين الأولين منهما بين المعادلتين
قاسم مشترك اذا جعل مساويًا للصفر تعين الجذر ح

فاذا جعل م رمزًا للقاسم المشترك الأعظم بين الكميتين
الكثيرتي الحدود د(س) و د((ر−ع س)/ك) وفرض أن ح
احد مقادير س به تتحقق المعادلة م=٠ كان هذا
مقدارًا محققًا للمعادلتين د(س)=٠ و د((ر−ع س)/ك)=٠
معًا ومن ثم كان د((ر−ع ح)/ك) معدوم فيكون (ر−ع ح)/ك جذرًا
للمعادلة د(س)=٠ وحينئذ اذا جعل و رمزًا لهذا الجذر
كانت الكميتان ح و و كل منهما من جذري المعادلة د(س)=٠
المحققين للارتباط ع ح + ك و = ر

فاذا وجد لمعادلة د(س)=٠ جذر كالجذر ه بحيث يكون
(ر−ع ه)/ك = ه أو ع ه + ك ه = ر

اعلم

أخذ هذا الجذر ايضاً من المعادلة $ر = ٠$ أعني انه يلزم في
هذه الحالة ان يوضع هـ في الارتباط (١) فيكون الجذر الثاني
هو الكمية هـ بعينها لكنه لا ينبغي ان يستنبط من ذلك ان
الجذر هـ يدخل في المعادلة $د(س) = ٠$ مرتين لانه يكفي أن
يكون هذا الجذر داخلاً في هذه المعادلة مرة واحدة ليكون
محققاً لكل من المعادلتين $د\left(\frac{ر - ع س}{ك}\right) = ٠$ و $ر = ٠$.

ويشاهد بالسهولة انه اذا دخل جذر عدة مرات في المعادلة
$د(س) = ٠$ دخل ايضاً في المعادلة $ر = ٠$ بقدر ما دخل في
المعادلة المذكورة لان جذور المعادلة $د\left(\frac{ر - ع س}{ك}\right) = ٠$
هي مقادير س الحادثة من جعل $\frac{ر - ع س}{ك}$ مساوياً بالتوالي
لكل من جذور المعادلة $د(س) = ٠$ وحينئذ تكون الجذور المشتركة
بين المعادلتين $د\left(\frac{ر - ع س}{ك}\right) = ٠$ و $د(س) = ٠$ أي جذور
المعادلة $ر = ٠$ هي جذور المعادلة $د(س) = ٠$ التي يكون
المقدار $\frac{ر - ع س}{ك}$ مساوياً لكل واحد منها

بند ٥٢٥ ومتى كانت $ع = ك$ آل الارتباط (١) الى $هـ + و = ف$
وللاختصار يوضع $\frac{ر}{ع} = ف$ وحيث أن الجذرين ج و د

داخلاً بمثابة واحدة فى الارتباط المفروض فيتعين كلاهما
بالمعادلة $ح = ٠$ وحينئذ يلزم ان يكون هذان الجذران
معلومين من هذه المعادلة التى تتعين بها زيادة على ذلك
للمعادلة المفروضة جميع الجذور المحققة للارتباط
$س + س = ف$ الذى يؤخذ منه ان $س = \frac{١}{٢} ف$
فاذا كانت المعادلة $د(س) = ٠$ مشتملة على جذور كل منها
يساوى $\frac{١}{٢}$ ف واخرى يتكون من كل اثنين منها مجموع يساوى
ف فان المعادلة المحولة $د(س - س) = ٠$ الحادثة من المعادلة
$د(س) = ٠$ بواسطة الارتباط $ح + و = ف$ تكون مساوية
للمعادلة المفروضة وبناء على ذلك لا يمكن هنا استعمال الطريقة
السابقة

وفى هذه الحالة اذا حذفت فى مبدأ الأمر الجذور التى كل واحد
منها يساوى $\frac{١}{٢}$ ف أمكن تحليل المعادلة الناتجة الى مضاريب
بدرجة ثانية توضع بالصورة $ش^٢ - ى ف + ز$
و ز هو عبارة عن حاصل ضرب الجذرين ح و و اللذين يحصل
بالنسبة لهما $ح + و = ف$ فاذا قسم الطرف الأول من المعادلة

المفروضة

المفروضة على ش - س ف + ز تحصل من ذلك باق بدرجة اولى هو ع س + ك وحيث أن ع و ك كيتان كبرتا الحدود لا تشتملان الا على المجهول ز فلكي تكون القسمة بلا باق يلزم ان يكون ع = ٠ و ك = ٠ وحينئذ يكون للكيتين ع و ك قاسم مشترك اذا جعل مساويا للصفر تعينت به مقادير ز ثم انه يكون من المعادلة ش - س ف + ز = ٠ مقادير للمتغير س يكون كل واحد منها مطابقا لمقدار من مقادير ز

ويمكن ايضا استعمال هذه الطريقة في حالة ما اذا كانت بعض جذور المعادلة المفروضة محققة للارتباط ح + و = ف ولنفرض الآن ان الجذور الثلاثة ح و و و هـ من المعادلة د (س) = ٠ تحقق الارتباط ع ح + ك و + ر هـ = ف (و ع و ك و ر كميات معلومة) فيلزم ان يضاف الى هذا الارتباط المعادلات د (ح) = ٠ و د (و) = ٠ و د (هـ) = ٠ فاذا حذف و و هـ من المعادلتين الاخيرتين و من الارتباط ع ح + ك و + ر هـ = ف تحصل من ذلك معادلة تكون مشتملة على ح وتكون محققة هي والمعادلة د (ح) = ٠

وحينئذ يكون لهاتين المعادلتين قاسم مشترك اذ اجعلهما ساويا للصفر تمتثن به الجذر ه فان كانت ع = ک تعين بالقاسم المشترك الجذران ه و و اعني انه يكون بدرجة ثانية وان كانت ع = ک = ر كان هذا القاسم المشترك بدرجة ثالثة

بند ٢٢٧ وما ذكر في شأن الارتباطات المبينة بمعادلات من المعادلات ذات الدرجة الاولى يستعمل في الارتباطات من حيث هي والصعوبات التي توجد في مسائل هذا النوع لا تترتب الا على الحذف المطلوب عمله

وقد قال المهندس لاكروا ان تنقيص درجة المعادلات لا ينشأ في الا اذا شوهد بين مجاهيل مسئلة ممكنة أن عدد المعادلات يزيد عن عدد المجاهيل و هذا يحصل غالبًا اذا وحظت المسئلة المفروضة بأوجه متنوعة لانه يوجد حينئذ بالنسبة لمجهول واحد معادلتان انتهيا ثبتتان باتحادهما مع بعضهما يكون لهما قاسم مشترك منه يؤخذ ابسط حل للمسئلة

بند ٢٢٨ ويلزم في بعض الأحيان تعيين الارتباطات الواقعة بين المكررات غير المعينة لمعادلة حتى تكون لهذه المعادلة

س المعادلة على سٓ — ٢ه س٣ + ٢ه٢ ط س — ح٢ وتتوالى عليه القسمة الى ان يتوصل الى باق بدرجة ثانية بالنسبة للمتغير س

وهذا الباقي يوضع بالصورة ع س٢ + ك س + ف (بجعل ع و ك و ف رموزًا لكميات محتوية على مكررات المعادلة المفروضة والكمية الاختيارية ه) وحينئذ توضع الكميات الثلاث هكذا

ع = ٠ و ك = ٠ و ف = ٠ فاذا حذف ه من هذه المعادلات الثلاث تحصلت من ذلك معادلتان شرطيتان دالتان على الارتباطات المطلوبة الواقعة بين المكررات غير المعينة للمعادلة المفروضة

فاذا فرض الآن انه يراد تعيين الارتباطات الواقعة بين مكررات المعادلة

س٤ + ع س٣ + ك س٢ + ق س + ل = ٠

بشرط ان يكون لها جذران متساويان ومتخالفان في العلامة فان هذه المعادلة تكون محتوية على مضروب يوضع بالصورة س٢ — ه٢ وحينئذ اذا قسم الطرف الاول على س٢ — ه٢ تحصّل من ذلك باق بدرجة اولى وهو

(ه٢ ع + ق)

$(\text{هـ}^{2}\,\text{ع} + \text{ق})\,\text{س} + \text{هـ}^{3} + \text{ض}\,\text{هـ}^{2} - \text{ل}$

ويلزم لكى تكون قسمة صحيحة بدون باق ان يكون

$$\text{هـ}^{2}\,\text{ع} + \text{ق} = ٠ \qquad \text{هـ}^{3} + \text{ك}\,\text{هـ}^{2} + \text{ل} = ٠$$

وبحذف هـ من هاتين المعادلتين نشاهد أن الارتباط المطلوب يكون مبيناً بالصورة

$$\text{ق}^{3} - \text{ع}\,\text{ك}\,\text{ق} + \text{ع}^{2}\,\text{ل} = ٠$$

في المعادلات العكسية

٢٢٩ يطلق على المعادلة اسم المعادلة العكسية اذا كانت لا تتغير عندما يوضع فيها $\frac{1}{\text{س}}$ بدل س

مثلاً لنفرض المعادلة الزوجية الدرجة

$$\text{س}^{6} + \text{ع}_{1}\,\text{س}^{5} + \text{ك}_{1}\,\text{س}^{4} + \text{ق}_{1}\,\text{س}^{3} + \text{ل}_{1}\,\text{س}^{2} + \text{ط}_{1}\,\text{س} + \text{ع}_{2} = ٠$$

فاذا وضع في هذه المعادلة $\frac{1}{\text{س}}$ بدل س وضربت جميع حدودها في س^{6} وقسمت على ع_{2} آلت الى

$$\text{س}^{6} + \frac{\text{ط}_{1}}{\text{ع}_{2}}\,\text{س}^{5} + \frac{\text{ل}_{1}}{\text{ع}_{2}}\,\text{س}^{4} + \frac{\text{ق}_{1}}{\text{ع}_{2}}\,\text{س}^{3} + \frac{\text{ك}_{1}}{\text{ع}_{2}}\,\text{س}^{2} + \frac{\text{ع}_{1}}{\text{ع}_{2}}\,\text{س} + \frac{1}{\text{ع}_{2}}$$

ولكيلا تكون هذه المعادلة مختلفة عن المعادلة المفروضة يلزم ان يكون

$\frac{ا}{ع_١} = ع$ و $\frac{ط}{ع_١} = ط_١$ و $\frac{ك}{ع_١} = ي_١$ و $\frac{ق}{ع_١} = ق_١$ و $\frac{ل}{ع_١} = ك_١$ و

$\frac{ط_١}{ع_١} = ع$

وحينئذ يؤخذ من الارتباط $\frac{ا}{ع_١} = ع$ أن $ع^٢ = ١$ ومن هنا ينتج
أن $ع = \pm ١$ فاذا فرض أن $ع = +١$ فان باقي الارتباطات
تكون مبينة هكذا

$ع = ط_١$ و $ك = ي_١$ و $ق_١ = ق$

واذا فرض أن $ع = -١$ فان باقي الارتباطات تكون مبينة هكذا

$ع = -ط_١$ و $ك = -ي_١$ و $ق = -ق_١$ أعني $ق = ٠$

وحينئذ يلزم لكي تكون معادلة زوجية الدرجة عكسية عندما يكون
حدها الوسط موجودا أن تكون مكررات باقي الحدود التي على ابعاد
متساوية من النهايتين متساوية فان كان حدها الوسط معدوما
فإما ان تكون مكررات الحدود التي على ابعاد متساوية من النهايتين
متساوية واما ان تكون لها مقادير رقمية متساوية ومتخالفة
في العلامة وهذان الشرطان كافيان لتحقيق المعادلة المفروضة
واذا اجريت على المعادلة ذات الدرجة المزدوجة عملية مشابهة
للعملية التي اجريت على المعادلة العمومية ذات الدرجة السادسة

علم

علم انه يلزم لكى تكون اى معادلة فردية الدرجة عكسية ان تكون الحدود التى على ابعاد متساوية من النهايتين تكون متساوية أو انها تكون متحدة فى المقدار الرقمى ومتخالفة فى العلامة

٢٢٢ ويؤخذ من تعريف المعادلات العكسية انه اذا تحققت معادلة مشابهة للمعادلة المفروضة بالجذور ح ، ء ، ه ، ك تحققت ايضا بالجذور $\frac{1}{\text{ح}}$ ، $\frac{1}{\text{ء}}$ ، $\frac{1}{\text{ه}}$ ، ك وبناء على ذلك اذا كان ح مختلفا عن $\frac{1}{\text{ح}}$ كان ء مختلفا عن $\frac{1}{\text{ء}}$ ، ه مختلفا عن $\frac{1}{\text{ه}}$ ، ك وكانت المعادلة زوجية الدرجة وزيادة على ذلك يكون الحد الأخير المساوى لحاصل ضرب الجذور موجبا بالمقدار

واذا فرض ان $\text{ح} = \frac{1}{\text{ح}}$ كان $\text{ح}^2 = 1$ ومن هنا يكون

$\text{ح} = \pm 1$

اذا تقرر هذا وكان حاصل ضرب جذور معادلة مساويا للحد الأخير مأخوذا بعلامته اذا كانت المعادلة زوجية الدرجة وبعلامة مخالفة لعلامته اذا كانت فردية الدرجة نتج مما تقدم ان اى معادلة عكسية من المعادلات الفردية الدرجة التى يكون حدها الأخير موجبا بالمقدار $+1$ يكون لها جذر يساوى

وان اى معادلة عكسية من المعادلات الفردية الدرجة التى يكون حدها الأخير مبينًا بالمقدار −١ يكون لها جذر يساوى +١ وان اى معادلة عكسية من المعادلات الزوجية الدرجة التى يكون حدها الأخير مبينًا بالمقدار −١ يكون لها جذر يساوى −١ وجذر يساوى +١ وحينئذ اذا حذف من هذه المعادلات الجذران +١ و −١ تحولت الى معادلات اخرى عكسية من المعادلات الزوجية الدرجة التى تكون فيها مكورات الحدود الموضوعة على ابعاد متساوية من النهايتين متساوية ومتحدة فى العلامة

ويتوصل الى مثل هذه النواتج بمجرد النظر الى المعادلة

$$(١) \cdots \quad \text{س}^{٧} + \text{ع}\,\text{س}^{٦} + \text{ك}_{١}\,\text{س}^{٥} + \text{ق}_{١}\,\text{س}^{٤} + \text{ق}\,\text{س}^{٣} + \text{ك}\,\text{س}^{٢} + \text{ع}_{١}\,\text{س} + ١ = ٠$$

التى يمكن وضعها بالصورة

$$\text{س}^{٧} + ١ + \text{ع}\,\text{س}(\text{س}^{٥} + ١) + \text{ك}\,\text{س}^{٢}(\text{س}^{٣} + ١) + \text{ق}\,\text{س}^{٣}(\text{س} + ١) = ٠$$

ومن هنا يؤخذ ان الطرف الأول من هذه المعادلة يحتوى على المضروب س+١ الذى ينتج منه الجذر −١ فاذا اجريت عملية قسمة كل من الكميات ذات الحدين $\text{س}^{٧}+١$ و $\text{س}^{٥}+١$ و نحو على المضروب

واذا فرضت المعادلة

$$س^{٦} - ع\,س^{٥} + ك\,س^{٤} - ك\,س^{٢} - ع\,س - ١ = ٠$$

التي يمكن وضعها بالصورة

$$س^{٦} - ١ + ع\,س\,(س^{٤} - ١) + ك\,س^{٢}\,(س^{٢} - ١) = ٠$$

شوهد من ذلك ان الطرف الأول من المعادلة يحتوى على المضروب $س^{٢} - ١$ الذي يؤخذ منه الجذران $س = +١$ و $س = -١$ فاذا اجريت عملية قسمة كل من الكميات ذات الحدين $س^{٦} - ١$ و $س^{٤} - ١$ و $س^{٢} - ١$ على المضروب $س^{٢} - ١$ تحصلت من ذلك المعادلة

$$س^{٤} + ع\,س^{٣} + (ك + ١)\,س^{٢} + ع\,س + ١ = ٠$$

تنبيه ٢٢ ولنتصدى الآن لبيان الكيفية التي بها يمكن تحويل حل معادلة عكسية زوجية الدرجة مكرراتها التي على ابعاد متساوية من النهايتين متساوية ومتحدة في العلامة الى حل معادلة على النصف منها في الدرجة فنقول

حيث ان جذور المعادلة تنقسم الى جملتين بحيث اذا كان واحد من جذور احدى هاتين الجملتين مبيناً بالرمز $س$ كان الجذر المقابل له من الجملة الاخرى مبيناً بالرمز $\frac{١}{س}$ والمجموع $س + \frac{١}{س}$

باقياً

باقياً على حاله عندما توضع الكمية $\frac{1}{س}$ بدل س أو س بدل $\frac{1}{س}$

فيؤخذ من ذلك انه اذا جعل

$$(٤) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad س + \frac{1}{س} = ز$$

كانت مقادير المجهول ز داخلة في معادلة هي في الدرجة على النصف من المعادلة المفروضة .

فاذا فرضت المعادلة العمومية ذات الدرجة السادسة

$$(٥) \ldots \quad س^٦ + ع_١ س^٥ + ع_٢ س^٤ + ق س^٣ + ع_٢ س^٢ + ع_١ س + ١ = ٠$$

لزم لتحصيل المعادلة التي تحصل منها مقادير المجهول ز ان يحذف المجهول س من هذه المعادلة والمعادلة (٤) وذلك بأن تقسم جميع حدود المعادلة (٥) على $س^٣$ فتتحول الى الصورة

$$(٦) \therefore \ldots \quad س^٣ + \frac{1}{س^٣} + ع_١ \left(س^٢ + \frac{1}{س^٢}\right) + ع_٢ \left(س + \frac{1}{س}\right) + ق = ٠$$

وبرفع طرفي المعادلة (٤) الى الدرجة الثانية يحدث

$$س^٢ + \frac{1}{س^٢} = ز^٢ - ٢$$

فاذا ضربت هذه المعادلة في المعادلة (٤) حدث

$$س^٣ + \frac{1}{س^٣} = ز^٣ - ٢ ز - \left(س + \frac{1}{س}\right) = ز^٣ - ٣ ز$$

واذا وضعت في المعادلة (٦) المقادير $س + \frac{1}{س}$ و $س^٢ + \frac{1}{س^٢}$ و $س^٣ + \frac{1}{س^٣}$

تحصلت من ذلك معادلة بدرجة ثالثة مشتملة على المجهول ز

ومتى تحصلت جذور هذه المعادلة تعينت مقادير س بواسطة

المعادلة (٤) بعد تحويلها الى المعادلة

$\text{س}^2 - \text{ز}\,\text{س} + 1 = 0$ التي يؤخذ منها أن $\text{س} = \frac{1}{2}\text{ز} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\text{ز}^2 - 1}$

وكل مقدار مفروض للمتغير ز يؤخذ منه مقداران للمتغير س

يكون حاصل ضربهما مساويًا للواحد

ويمكن بيان الكميات ذات الحدين $\text{س} + \frac{1}{\text{س}}$ و $\text{س}^2 + \frac{1}{\text{س}^2}$ و $\text{س}^3 + \frac{1}{\text{س}^3}$ الخ

بالنسبة للكمية ز مع ملاحظة الارتباط $\text{س} + \frac{1}{\text{س}} = \text{ز}$ اذ يستعمل

القانون العمومي الذي يتوصل اليه بواسطة ضرب $\text{س}^{\text{ح}} + \frac{1}{\text{س}^{\text{ح}}}$ في س

$+ \frac{1}{\text{س}}$ على موجب قواعد الضرب فيحدث

$$\left(\text{س}^{\text{ح}} + \frac{1}{\text{س}^{\text{ح}}}\right)\left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right) = \text{س}^{\text{ح}+1} + \frac{1}{\text{س}^{\text{ح}+1}} + \text{س}^{\text{ح}-1} + \frac{1}{\text{س}^{\text{ح}-1}}$$

ومن هنا يؤخذ أن

$$\text{س}^{\text{ح}+1} + \frac{1}{\text{س}^{\text{ح}-1}} = \left(\text{س}^{\text{ح}} + \frac{1}{\text{س}^{\text{ح}}}\right)\left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right) - \left(\text{س}^{\text{ح}-1} + \frac{1}{\text{س}^{\text{ح}-1}}\right) \quad \ldots (٧)$$

وحينئذ تستنتج مقادير الكميات ذات الحدين $\text{س}^2 + \frac{1}{\text{س}^2}$ و $\text{س}^3 +$

$\frac{1}{\text{س}^3}$ الخ من القانون (٧) وذلك بان يجعل فيه على التوالي

$\text{ح} = 1$، $\text{ح} = 2$، $\text{ح} = 3$ الخ ويوضع في كل مرة من ذلك ز

بدل

$س + \frac{١}{س}$ وبهذه الصورة يستدل على انه يحصل للكمية ذات الحدين $س^{م} + \frac{١}{س^{م}}$ معادلة تكون درجته م بالنسبة الى ز $\frac{م}{٢}$ ولنمثل لذلك بالمعادلة

$$٤س^{٦} - ٢٤س^{٥} + ٥٧س^{٤} - ٧٣س^{٣} + ٥٧س^{٢} - ٢٤س + ٤ = ٠$$

وبقسمة هذه المعادلة على $س^{٣}$ وجمع الحدود المتماثلة الوضع يحدث

$$٤\left(س^{٣} + \frac{١}{س^{٣}}\right) - ٢٤\left(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}\right) + ٥٧\left(س + \frac{١}{س}\right) - ٧٣ = ٠$$

وبفرض $س + \frac{١}{س} = ز$ يحدث

$$س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}} = ز^{٢} - ٢ \quad ، \quad س^{٣} + \frac{١}{س^{٣}} = ز^{٣} - ٣ز$$

وحينئذ تؤول المعادلة السابقة الى

$$٤ز^{٣} - ٢٤ز^{٢} + ٤٥ز - ٢٥ = ٠$$

وحيث ان هذه المعادلة تتحقق بالجذر +١ فبحذف المضروب $ز - ١$ تتحصل من ذلك معادلة ذات درجة ثانية كل من جذريها يساوي $\frac{٥}{٢}$

فاذا جعل $ز = \frac{٥}{٢}$ حدث $س = ٢$ ، $س = \frac{١}{٢}$ وبجعل $ز = ١$ يحدث

$$س = \frac{١}{٢}\left(١ \pm \sqrt{-٣}\right)$$

وعلى ذلك يكون للمعادلة المفروضة جذران متساويان كلاهما يساوى ١ ، وآخران كلاهما يساوى ½ وجذران تخيليان هما ½ (١ ± √−٣)

بند ٣٣٢ ويمكن ان نستعوض طريقة الحذف المتقدمة فى (بند ٣٣١) بالطريقة العمومية المقررة فى الباب الحادى عشر فنقول للمعادلة (٤) كما ذكرنا الى

$$ش - زس + ١ = ٠$$

فاذا كانت المعادلة المفروضة لا تختلف عن المعادلة المذكورة فى المثال السابق فانه يحصل بعد جعل م١ س + م٢ رمزاً للباقى قسمة الطرف الأول من هذه المعادلة على ش - زس + ١

م١ = ٤ ز٥ - ٢٠ ز٤ + ١٤ ز٣ - ز٢ - ٥٤ ز + ٥٠ ، ن

م٢ = -٤ ز٤ + ٢٤ ز٣ - ٤٠ ز٢ + ٥٠ ز

ومن هاتين الدالتين الكبرى فى الحدود م١ و م٢ لهما قاسم مشترك هو

٤ ز٣ - ٢٤ ز٢ + ٤٥ ز - ٢٥

وحينئذ يحصل من قسمة م١ س + م٢ على هذا القاسم الخارج
(ز - ١)

المعادلتين مخفضتان مقادير ز فيلزم ان يبحث عن القاسم المشترك
الأعظم بين الكميتين الكثيرتي الحدود ا‌ن م ويجعل مساويا
للصفر فتتحصل من ذلك المعادلة المشتملة على المجهول ز

في تحويل المقادير التخيلية ذات الدرجة الثانية

الى الصورة $ل + ى\sqrt{-١}$ وقياسها وجمعها وطرحها وضربها وقسمتها
وهي على هذه الصورة

بند ٣٣٤ هذا وان كان تعيين الجذر التربيعي لكمية سالبة يدل على
عملية مستحيلة الا ان علماء الجبر يفرضون ان الجذور التخيلية كميات
ويستعملونها بكثرة في الحسابات بواسطة بعض توافيق
مثلا اذا جعل ى رمزا لكمية حقيقية كانت جذور الكمية السالبة
$-ى^٢$ مبينة في العادة بالصورة $\pm\sqrt{-ى^٢}$ وحيث انه يمكن
اعتبار الكمية السالبة كحاصل ضرب $ى^٢ \times -١$ فاذا فرض أن الجذور
التربيعية لهذا الحاصل متحصلة كما في الحالة التي تكون فيها المضاريب
موجبة من ضرب الجذور التربيعية لهذه المضاريب في بعضها
فان الجذور التربيعية للكمية $-ى^٢$ تكون مبينة بالصورة $\pm ى\sqrt{-١}$
وحينئذ يكون المقداران $\pm\sqrt{-ى^٢}$ و $\pm ى\sqrt{-١}$ متكافئين

وبناء على ذلك لا تتغير في الأعمال العلامة جذر تخيلية غير العلامة $\sqrt{-1}$

فاذا فرضت الآن المعادلة التامة ذات الدرجة الثانية

$$\text{س}^{2} - \text{ع}\,\text{س} + \text{ك} = 0$$

شوهد انه اذا كان $\text{ك} > \frac{1}{4}\,\text{ع}^{2}$ كانت جذور هذه المعادلة تخيلية ولتجتنب الكسور نضع ل بدل $\frac{1}{2}\,\text{ع}$ ولبيان أن ك اكبر من $\frac{1}{4}\,\text{ع}^{2}$ نفرض أن $\text{ك} = \text{ل}^{2} + \text{ه}^{2}$ فتؤول المعادلة المفروضة الى

$$\text{س}^{2} - 2\,\text{ل}\,\text{س} + \text{ل}^{2} + \text{ه}^{2} = 0$$

وجذور هذه المعادلة تعلم من القانون

$$\text{س} = \text{ل} \pm \sqrt{-\text{ه}^{2}}$$

الذي يكتب بمقتضى ما ذكر هكذا

$$\text{س} = \text{ل} \pm \text{ه}\sqrt{-1}$$

ويطلق اسم المقدار التخيلي على كل كمية لا يمكن بيانها بأي مقدار حقيقي موجب أو سالب غير أن الكميتين التخيليتين الموضوعتين بالصورة $\text{ن} + \text{ه}\sqrt{-1}$ أو $\text{ن} - \text{ه}\sqrt{-1}$ هما اللتان تستعملان [illegible] في العمليات الجبرية ولذا اذا اطلق اسم الكمية التخيلية لا يفهم

في العادة الا الى الكمية الموضوعة بهذه الصورة

فاذا انعدمت في المقدار ل + ء √-١ الكمية ء التي هي مكرر

√-١ آل الحد ء √-١ الى الصفر وبهذا يؤول المقدار المذكور الى الكمية

الحقيقية ل وحينئذ تعتبر المقادير الحقيقية كحالة خصوصية

من المقادير التخيلية ومن البديهي انه يلزم لكي تكون المعادلة

التخيلية متساوية ان تكون في هذه المقادير الكميات

الحقيقية متساوية وبناء على ذلك فاي معادلة طرفاها كميتان تخيليتان

تكون كناية عن حاصل جمع معادلتين اطرافهما هي الكميات الحقيقية الداخلة

في هذه المعادلة مثلاً المعادلة

ل - ء √-١ = لا + ط √-١

كناية عن المعادلتين الحقيقيتين

ل = لا ، ء = ط

ويقال للمقدارين التخيليين مقترنان اذا كانا لا يختلفان عن بعضهما

الا بعلامة مكرر √-١ وذلك كالمقدارين

ل + ء √-١ و ل - ء √-١

 والمقادير التخيلية تنطبق عليها القواعد الحسابية بغير انه

ثم حذف المربع $\sqrt{-1}$ هو -1 ولنوضح ذلك بمثال المشتمل على كمية
جمع مقدارين تخيليين وطرحهما وضربهما هو

(ل + ے $\sqrt{-1}$) + (ى + ط $\sqrt{-1}$) = ل + ى + (ے + ط) $\sqrt{-1}$ و

(ل + ے $\sqrt{-1}$) − (ى + ط $\sqrt{-1}$) = ل − ى + (ے − ط) $\sqrt{-1}$ و

(ل + ے $\sqrt{-1}$) (ى + ط $\sqrt{-1}$) = لى − ے ط + (ل ط + ى ے) $\sqrt{-1}$

فاذا اجريت عملية الجمع على المقدارين المقترنين

ل + ے $\sqrt{-1}$ و ل − ے $\sqrt{-1}$

تحصلت من ذلك الكمية الحقيقية ٢ل واذا ضربا في بعضهما
كان حاصل ضربهما كمية حقيقية هي ل^{2} + ے^{2}
ويطلق على المقدار المطلق للجذر التربيعي للكمية ل^{2} + ے^{2} اسم
قياس كل من المقدارين ل + ے $\sqrt{-1}$ و ل − ے $\sqrt{-1}$ ومن هنا
يؤخذ ان قياس اى كمية حقيقية هو المقدار المطلق لهذه الكمية
ولكي يكون القياس $\sqrt{\text{ل}^{2}+\text{ے}^{2}}$ معدوما يلزم ان يكون ل = ٠ و ے = ٠
ليؤول المقدار ل + ے $\sqrt{-1}$ في هذه الحالة الى الصفر ويلزم
بعكس ذلك لكي يكون المقدار ل + ے $\sqrt{-1}$ معدوما ان يكون قياسه
مساويا للصفر لان هذا يستلزم جعل ل = ٠ و ے = ٠ ليكون

$\sqrt{\text{ل}^{2}+\text{ى}^{2}}=$

ومن البديهي انه يترتب دائمًا على تساوي المقدارين التخيليين تساوي قياسيهما وعكس ذلك لا يجوز

(بند ٢٣٦) قياس المقدار التخيلي المتحصل من ضرب المقدارين $\text{ل}+\text{ى}\sqrt{-1}$ و $\text{لا}+\text{ط}\sqrt{-1}$ في بعضهما هو

$$\sqrt{(\text{ل لا}-\text{ى ط})^{2}+(\text{ل ط}+\text{ى لا})^{2}}$$

وحينئذ يتحصل بواسطة القواعد الحسابية

$$(\text{ل لا}-\text{ى ط})^{2}+(\text{ل ط}+\text{ى لا})^{2}=(\text{ل}^{2}+\text{ى}^{2})(\text{لا}^{2}+\text{ط}^{2})$$

وبناء على ذلك يكون القياس المذكور مساويًا $\sqrt{(\text{ل}^{2}+\text{ى}^{2})(\text{لا}^{2}+\text{ط}^{2})}$ أو

$$\sqrt{\text{ل}^{2}+\text{ى}^{2}}\times\sqrt{\text{لا}^{2}+\text{ط}^{2}}$$

ومن هنا يؤخذ ان قياس حاصل ضرب مضروبين تخيليين يكون مساويًا لحاصل ضرب قياسي هذين المضروبين وحينئذ يكون قياس حاصل ضرب اي جملة من المضاريب التخيلية مساويًا لحاصل ضرب أقيسة هذه المضاريب

ويلزم لكي يكون اي حاصل ضرب مركب من عدة مضاريب تخيلية معدومًا ان يكون قياس هذا الحاصل معدومًا (كما في بند ٢٣٠)

وحيث

وحيث ان هذا القياس كناية عن حاصل ضرب باقية للمقادير التخيلية
التي هي كميات حقيقية موجبة فلا يكون معدوما الا اذا كان قياس واحد
من هذه المقادير مساويا للصفر وهذا لا يتأتى الا اذا كان واحد
من المقادير المذكورة معدوما وحينئذ يلزم لكي يكون اي حاصل
ضرب مركب من مقادير تخيلية معدوما أن يكون واحد من هذه المقادير
مساويا للصفر .

بند ٢٢٧ اذا اجريت عملية الضرب بطريق التوالي على الكمية $\sqrt{-1}$ تحصلت
من ذلك في مبداء الأمر لهذه الكمية القوى المتنوعة

$$(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1} \quad \text{و} \quad (\sqrt{-1})^2 = -1 \quad \text{و}$$

$$(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1} \quad \text{و} \quad (\sqrt{-1})^4 = +1$$

وحيث أن القوة الرابعة للكمية جذر $\sqrt{-1}$ هي $+1$ فاذا تكونت
القوى التي تزيد عن هذه القوة تحصلت من ذلك المقادير الأربعة

$$\sqrt{-1} \quad \text{و} \quad -1 \quad \text{و} \quad -\sqrt{-1} \quad \text{و} \quad +1$$

ويمكن بيان جميع قوى الكمية $\sqrt{-1}$ بواسطة اربعة قوانين
انه اذا جعل ج رمزا للعدد صحيح كانت جميع الاعداد الصحيحة
محصورة في القوانين الأربعة ٤ج و ٤ج+١ و ٤ج+٢ و ٤ج+٣

وحينئذ يؤخذ مما تقدم $(\sqrt{-1})^{٤ع+٢} = -١$ ه $(\sqrt{-1})^{٤ع+٣} = -\sqrt{-1}$

$(\sqrt{-1})^{٤ع} = ١$ ه $(\sqrt{-1})^{٤ع+١} = +\sqrt{-1}$

٢٣٨ فاذا قسمت الكمية التخيلية $ل + ى\sqrt{-1}$ على الكمية الحـ

لا وفرض ان خارج القسمة $ع + ك\sqrt{-1}$ لزم ان يحصل

$$لا(ع + ك\sqrt{-1}) = ل + ى\sqrt{-1}$$

او $$ع لا + ك لا\sqrt{-1} = ل + ى\sqrt{-1}$$

وينتج من هذه المتساوية الأخيرة ان $ع لا = ل$ ه $ك لا = ى$

يؤخذ أن $ع = \frac{ل}{لا}$ ه $ك = \frac{ى}{لا}$ وحينئذ يكون خارج القـ

$$\frac{ل}{لا} + \frac{ى}{لا}\sqrt{-1}$$

واذا قسمت الكمية التخيلية $ل + ى\sqrt{-1}$ على $لا + ط\sqrt{-1}$ و

ان خارج القسمة يساوى $ع + ك\sqrt{-1}$ تحصل

$$(ع + ك\sqrt{-1})(لا + ط\sqrt{-1}) = ل + ى\sqrt{-1}$$ أو

$$ع لا - ك ط + (ع ط + ك لا)\sqrt{-1} = ل + ى\sqrt{-1}$$

وهذه المعادلة تنقسم الى معادلتين اخريين هما

$$ع لا - ك ط = ل \quad ه \quad ع ط + ك لا = ى$$

ومنها يؤخذ أن

$ع =$

$$(٢)\quad \sqrt{\text{ﺣ}-\sqrt{\text{ﺀ}}}=\sqrt{\frac{\text{ﺣ}+\sqrt{\text{ﺣ}^{٢}-\text{ﺀ}}}{٢}}-\sqrt{\frac{\text{ﺣ}-\sqrt{\text{ﺣ}^{٢}-\text{ﺀ}}}{٢}}$$

ويمكن بواسطة هذين القانونين تحصيل الجذرين التربيعيين للمقدارين التخيليين $\text{ل}+\text{ى}\sqrt{-١}$ و $\text{ل}-\text{ى}\sqrt{-١}$ وذلك بان يوضع ل بدل ﺣ و $-\text{ى}^{٢}$ بدل ﺀ فيحدث

$$(٣)\quad \sqrt{\text{ل}+\text{ى}\sqrt{-١}}=\sqrt{\frac{\text{ل}+\sqrt{\text{ل}^{٢}+\text{ى}^{٢}}}{٢}}+\sqrt{\frac{\sqrt{\text{ل}^{٢}+\text{ى}^{٢}}-\text{ل}}{٢}}\,\sqrt{-١}$$

$$(٤)\quad \sqrt{\text{ل}-\text{ى}\sqrt{-١}}=\sqrt{\frac{\text{ل}+\sqrt{\text{ل}^{٢}+\text{ى}^{٢}}}{٢}}-\sqrt{\frac{\sqrt{\text{ل}^{٢}+\text{ى}^{٢}}-\text{ل}}{٢}}\,\sqrt{-١}$$

وإذا اريد تحصيل الجذرين التربيعيين للمقدارين التخيليين $+\sqrt{-١}$ و $-\sqrt{-١}$ فانه يلزم في القانونين (٣) و(٤) جعل ل = ٠ و ى = ١ فيحدث

$$\pm\sqrt{+\sqrt{-١}}=\pm\frac{١+\sqrt{-١}}{\sqrt{٢}}\quad \text{و}$$

$$\pm\sqrt{-\sqrt{-١}}=\pm\frac{١-\sqrt{-١}}{\sqrt{٢}}$$

وحينئذ يكون الجذران التربيعيان للمقدارين $+\sqrt{-١}$ و $-\sqrt{-١}$ كناية عن المقادير المتحصلة للمجهول ز في المعادلة $\text{ز}^{٤}=-١$ لانه يمكن وضع هذه المعادلة بالصورة $(\text{ز}^{٢})^{٢}=-١$ التي يؤخذ منها أن $\text{ز}^{٢}=\pm\sqrt{-١}$ ويؤخذ ايضا من المعادلة $\text{ز}^{٤}=-١$ أن ز جذر بدرجة رابعة للمقدار -١ ومن هنا يعلم انه يوجد للمقدار -١

أربعة جذور بدرجة رابعة هي

$$\frac{١+\sqrt{-١}}{\sqrt{٢}} \quad و \quad -\frac{١+\sqrt{-١}}{\sqrt{٢}} \quad و \quad \frac{١-\sqrt{-١}}{\sqrt{٢}} \quad و \quad -\frac{١-\sqrt{-١}}{\sqrt{٢}}$$

بند ٤٤٧ ويلزم لتحصيل الجذور التي بدرجة رابعة لكمية كالكمية ج ان نحل المعادلة

$$ز^٤ = ج$$

بأن يقال اذا فرض في مبدأ الأمر ان الكمية ج موجبة ثم جعل ح رمزا للعدد الذي تكون به قوته الرابعة مساوية للكمية ج وفرض ان ز = ح ص آلت المعادلة $ز^٤ = ج$ الى

$ح^٤ ص^٤ = ح^٤$ ومنها يؤخذ أن $ص^٤ = ١$ أو $ص^٤ - ١ = ٠$

وحيث أن $ص^٤ - ١$ هو حاصل ضرب $ص^٢ - ١$ في $ص^٢ + ١$ فيمكن تحويل المعادلة $ص^٤ - ١ = ٠$ الى المعادلتين

$$ص^٢ - ١ = ٠ \quad و \quad ص^٢ + ١ = ٠$$

فأما المعادلة الأولى فيؤخذ منها $ص = \pm ١$ وأما الثانية فيتحصل منها $ص = \pm\sqrt{-١}$ فاذا ضربت مقادير ص الأربعة في ح تحصلت للكمية ج أربعة جذور بدرجة رابعة هي

$$+ح \quad و \quad -ح \quad و \quad +ح\sqrt{-١} \quad و \quad -ح\sqrt{-١}$$

واذا فرض ان الكمية التي يراد تحصيل جذورها الأربعة سالبة

ووضعت بالصورة $-\text{ح}$ لزم لذلك ان تحل المعادلة

$$\text{ز}^{٤} = -\text{ح}$$

فاذا جعل ايضا ح رمزا للعدد الذي تكون قوته الرابعة مساوية للكمية ح وفرضنا ان ز = ح ص فان المعادلة $\text{ز}^{٤} = -\text{ح}$ تتحول الى المعادلة $\text{ح}^{٤} \text{ص}^{٤} = -\text{ح}^{٤}$ او $\text{ص}^{٤} = -١$

التي يؤخذ منها أن الجذور الاربعة للكمية $-\text{ح}$ تتحصل بواسطة ضرب الجذور الاربعة للمقدار -١ (المتحصلة كما في البند السابق) في الجذر ح

وإذا جعل ك رمزا للعدد صحيح و ح رمزا للكمية حقيقية أو لمقدار تخيلي وفرضت المعادلة

$$\text{ز}^{\text{ك}} = \text{ح} \quad \ldots\ldots\ldots (٥)$$

كانت مقادير ز المحققة لهذه المعادلة جذورا بالدرجة ك للكمية ح ولانه يمكن وضع هذه المعادلة بالصورة

$$\left(\text{ز}^{\frac{\text{ك}}{٢}}\right)^{٢} = \text{ح}$$

وهذه المعادلة يؤخذ منها للمجهول $\text{ز}^{\frac{\text{ك}}{٢}}$ مقداران كل واحد منهما يتكون من

منه للمجهول $ز^{ك-٢}$ مقداران وكل هذين المقدارين الجديدين يتكون
منه للمجهول $ز^{ك-٣}$ مقداران وهكذا الى أن يتحصل للمجهول ز عدد
من المقادير يساوي $٢^{ك}$ وجميع هذه المقادير تؤول الى كميات
توضع بالصورة $ع + ص\sqrt{-١}$ لانه قد تقدم ان الجذور التربيعية
لأي مقدار موضوع بهذه الصورة هي مقادير توضع بالصورة المذكورة
ويبرهن بالسهولة على ان جميع المقادير المتحصلة للمجهول ز مختلفة
بعضها عن بعض فيقال اذا تحققت هذه النظرية في المعادلة
$ز^{٢^{ك-١}} = ج$ تحققت ايضا في المعادلة $ز^{٢^{ك}} = ج$ وحينئذ اذا فرض
أن $م + ن\sqrt{-١}$ و $مَ + نَ\sqrt{-١}$ كناية عن مقدارين تخيليين غير متساويين
من مقادير المجهول ز بهما تحقق المعادلة $ز^{٢^{ك-١}} = ج$ كانت مقادير
ز المطابقة لهذه المقادير في المعادلة $ز^{٢^{ك}} = ج$ هي الجذور التربيعية
لهذين المقدارين التخيليين لكنه يلزم بمقتضى المعادلتين المتقدمتين
(نمرة ٣٣٩) ان يكون الجذران التربيعيان للكمية $م + ن\sqrt{-١}$
مختلفين عن بعضهما وان يكون الجذران التربيعيان للكمية $مَ + نَ\sqrt{-١}$
مختلفين عن بعضهما ايضا وزيادة على ذلك يكون كل واحد منهما مختلفا
عن الجذرين التربيعيين للكمية الأولى لانه ان كان الأمر بخلاف ذلك

ورفع هذان الجذران الى القوة الثانية كان الناتج واحداً وبناءً على ذلك

لا تكون الكميتان م + ح $\sqrt{-1}$ و مَ + حَ $\sqrt{-1}$ مختلفتين عن بعضهما

وهذا مخالف للفرض

فاذا فرضت المعادلة

(٦) ..... $ز^م = ﺣ$

وجعل م رمزاً لعدد صحيح كانت المقادير المتحصلة للمجهول ز من هذه المعادلة جذوراً بالدرجة م للكمية ﺣ فان كان م عدداً زوجياً وضع بالصورة ٢ × ك وحيث أن ٢ هو عدد فردى فان فرضت المعادلة $ز^{\frac{م}{٢}}$ = ص تحولت المعادلة (٦) الى

(٧) .... $ص^٢ = ﺣ$

ومنها امكن تعيين مقادير ص المختصة لهذه المعادلة تحصل للمجهول من كل مقدار مفروض لهذا المجهول بواسطة العمليات المتوالية التى تجرى لاستخراج الجذور التربيعية عدد من المقادير يساوى ك

واذا لوحظت الحالة التى تكون فيها ﺣ كمية حقيقية موجبة أو سالبة وكان ٢ = ٣ آلت المعادلة (٧) الى

(٨) .... $ص^٣ = ﺣ$

ـه ـــــ

اذا فرض

واذا فرض انه صار استخراج الجذر التكعيبي لمقدار جـ المطلق بواسطة الجداول اللوغاريتمية وحصل هـ رمزاً لهذا الجذر التكعيبي المأخوذ بعلامة كعلامة الكمية جـ كان جـ = $هـ^٣$ واذا كان ص = هـ س آلت المعادلة (٨) الى

$$هـ^٣ س^٣ = هـ^٣$$ ومن هنا ينتج أن $س^٣ = ١$ أو $س^٣ - ١ = ٠$

وحينئذ يكون $س^٣ - ١$ قابلاً للقسمة على س - ١ (كما في بند ٤ من الجزء الاول) ويكون خارج القسمة هو $س^٢ + س + ١$ وبناء على ذلك يمكن وضع المعادلة $س^٣ - ١ = ٠$ بالصورة

$$(س - ١)(س^٢ + س + ١) = ٠$$

فاذاً يلزم لكي يكون حاصل ضرب جملة مضاريب حقيقية أو تخيلية معدوماً ان يكون واحد من هذه المضاريب معدوماً (كما في بند ٢٢٦) [illegible] جذور المعادلة $س^٣ - ١ = ٠$ بواسطة حل المعادلتين

$$[illegible] = ٠ \quad و \quad س^٢ + س + ١ = ٠$$

فيؤخذ من المعادلة س - ١ = ٠ أن س = ١ ومن المعادلة $س^٢ + س + ١ = ٠$ أن

$$س = \frac{-١ + \sqrt{٣}\sqrt{-١}}{٢} \quad أو \quad س = \frac{-١ - \sqrt{٣}\sqrt{-١}}{٢}$$

ومن هنا يعلم ان المعادلة لها ثلاثة جذور تكعيبية

$$١ \text{ و } \frac{-١ + \sqrt{٣}\sqrt{-١}}{٢} \text{ و } \frac{-١ - \sqrt{٣}\sqrt{-١}}{٢}$$

فاذا ضربت هذه الجذور التكعيبية الثلاثة للواحد في جـ تحصلت
جميع الجذور التكعيبية للكمية جـ

واذا اريد معرفة الكيفية التي يكون بها المقدار $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$
جذرا تكعيبيا الزم ان يرفع هذا المقدار الى القوة الثالثة وذلك
برفعه الى القوة الثانية فيتحصل من ذلك المقدار $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$
الذي يتحصل من ضربه في $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ حاصل ضرب هو الواحد
ومنه يعرف ان مكعب $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ يساوي الواحد

ويستنبط من هذه العمليات الحسابية ان كل واحد من الجذرين
التكعيبيين التخيليين للواحد عبارة عن مربع الآخر وحينئذ اذا رمز
للاخذ [illegible] احد من هذين الجذرين بالرمز ل كان الآخر
مبينا بالرمز $ل^2$ واذا جعل جـ كما كان رمزا للجذر التكعيبي الحقيقي
للكمية جـ كانت الجذور الثلاثة التكعيبية للكمية جـ مبينة
بالرموز جـ و جـ ل و جـ $ل^2$

تنبيه ٢٤٤ — يمكن تحصيل الجذور التي بدرجة سادسة لأي كمية ان توخذ
الجذور التربيعية لكل من الجذور الثلاثة التكعيبية لهذه الكمية
فاذا فرض ان الكمية المفروضة موجبة ورمز اليها بالرمز + $جـ^6$

ويجعل ﻫ رمزا للعدد الذي اذا رفع الى القوة الثالثة تحصلت منه
الكمية جـ كانت جذور ثلاثة التكعيبية لهذه الكمية مبينة
بالرموز ﻫ و ﻫ ل و ﻫ ل² والجذور التربيعية لجذر ﻫ مبينة
بالرمز ± ﻫ والجذور التربيعية للجذر ﻫ ل مبينة بالرمز
± ﻫ ل وتحصل الجذور التربيعية للجذر ﻫ ل² بنية على ان
الارتباط ل³ = ١ يؤخذ منه ل⁴ = ل ومن هنا ينتج ان الجذور
التربيعية للجذر ﻫ ل² تكون مبينة بالرمز ± ﻫ ل² وحينئذ
تكون الجذور التي بدرجة سادسة للكمية جـ مبينة بالرمز

± ﻫ و ± ﻫ ل و ± ﻫ ل²

ويمكن تحصيل هذه الجذور بكيفية اخرى هي انه اذا رمز الى واحد
منها بالرمز ز تحصلت من ذلك المعادلة

ز⁶ = جـ

ولنرمز ايضا بالرمز ﻫ الى العدد الذي اذا رفع الى القوة السادسة
تحصلت منه الكمية + جـ فتكون ﻫ⁶ = جـ فاذا فرض
ز = ﻫ ص آلت المعادلة ز⁶ = جـ الى الصورة
ﻫ⁶ ص⁶ = ﻫ⁶ ومنها ينتج أن ص⁶ = ١ أو ص⁶ − ١ = ٠

وحيث ان ص٦ − ١ كناية عن حاصل ضرب ص٣ − ١ فى ص٣ + ١ فيمكن

استعواض المعادلة ص٦ − ١ = ٠ بالمعادلتين

ص٣ − ١ = ٠ و ص٣ + ١ = ٠

وحيث ان جذور المعادلة ص٣ − ١ = ٠ هى ١ و ل و ل٢ فتكون

جذور المعادلة ص٣ + ١ = ٠ هى − ١ و − ل و − ل٢ فاذا ضربت

هذه المقادير الستة المفروضة للمتغير ص فى حـ كانت الجذور

السداسية حـ٦ هى + حـ و + حـ ل و + حـ ل٢ و − حـ و − حـ ل و − حـ

ل٢ ويستنبط من الملحوظات المتقدمة ان الجذور التى درجتها

قوة من قوى العدد ٢ أو حاصل ضرب العدد ٣ فى قوة من قوى ٢

تكون لها مقادير بقدر ما يوجد فى درجتها من الآحاد

وقد تقدم أن هذه النظرية تشتمل على جذور سائر الدرجات لانه

اذا رمز بالحرف م لعدد صحيح كان دائماً للكمية الحقيقية أو

للمقدار الموضوع بالصورة ع + ك √−١ جذور عددها م

بالدرجة م وحينئذ توضع جميع المقادير التخيلية لهذه الجذور

بالصورة ع + ك √−١

في المعادلات ذات الحدين ومعادلات ذات الحدود الثلاثة التي يمكن تحويلها الى معادلات من الدرجة الثانية

بند ٢٤٠ يطلق اسم المعادلات ذات الحدين على المعادلات التي يمكن وضعها بالصورة

$$س^{م} - ج = ٠ \quad \ldots\ldots\ldots (١)$$

و ج هي كناية عن كمية معلومة

وجذور المعادلة (١) هي المقادير المتنوعة الجبرية التي تعرض للكمية $\sqrt[م]{ج}$ وبناء على ذلك يكون لها جذور عددها م (كما في بند ٢٣٩) على اي وجه كان المقدار الحقيقي او التخيلي للكمية ج وهذه الجذور تكون كلها غير متساوية لانه لا يوجد مضروب مشترك بين الكمية ذات الحدين $س^{م} - ج$ ومشتقتها ذات الدرجة الاولى $م س^{م-١}$ وحينئذ يكون للمقدار الجذري $\sqrt[م]{ج}$ باعتبار جبريا مقادير عددها م مختلفة بعضها عن بعض

فاذا جعل ح رمزاً للواحد من مقادير الكمية الجذرية $\sqrt[م]{ج}$ أعني لواحد من جذور المعادلة (١) كان $ح^{م} = ج$ واذا فرض $س = ح ص$ ووضع مقدار س هذا في المعادلة انتج منه

كان لهذه المعادلة [illegible] لها جذر حقيقي غير

[illegible] لا يمكن [illegible] المفروضة للتغير

[illegible] سقط عن الواحد

كان $ص^{٢م+١}$ [illegible]

وإذا قسم الطرف الأول من المعادلة المفروضة على ص−١ تحصلت

من ذلك المعادلة

$$ص^{٢م} + ص^{٢م-١} + ص^{٢م-٢} + ... + ص^{٢} + ص + ١ = ٠ \quad .....(٦)$$

وهذه المعادلة [illegible] الحل معادلة نصفها في الدرجة (كما في صحيفة ٣٢٩)

والمعادلة $ص^{٢م+١} + ١ = ٠$ لها جذر يساوي −١ وأما جذورها

الاخرى فهي تخيلية

ولتعيين هذه الجذور يلزم في المعادلة حذف المضروب ص+١

الذي يحصل من حذفه معادلة عكسية درجتها ٢م وإذا ثبت

[illegible] إذا تحصلت جذور المعادلة $ص^{٢م+١} - ١ = ٠$ لزم

تغيير علامات هذه الجذور لتحصل من ذلك جذور المعادلة $ص^{٢م+١} + ١ = ٠$

فإذا جعل م رمز العدد زوجي كالعدد ٢م كان للمعادلة

$ص^{٢م} - ١ = ٠$ جذران حقيقيان هما +١ و −١ وأما باقي جذورها

فانها تكون تخيلية ولتعيين هذه الجذور يلزم ان تقسم المعادلة
المفروضة على ص-١ فتحصل من ذلك معادلة عكسية درجتها
٢ع-٢ لا تكون مشتملة الا على قوى زوجية للمجهول لكنه يسهل حل
المعادلة $ص^{٢ع}-١=٠$ بواسطة قسمتها الى المعادلتين $ص^٢-١=٠$
و $ص^٢+١=٠$

وحيث ان المعادلة $ص^{٢ع}+١=٠$ لها جذور تخيلية فقط فيلزم
تحويلها الى معادلة نصفها في الدرجة بأن يجعل $ص+\frac{١}{ص}=ز$
ويمكن ايضا ان حل المعادلة $ص^{٢ع}+١=٠$ يؤول الى حل معادلة
ذات حدين فردية الدرجة وذلك بأن يجرى عليها الطريقة المتقدمة
(في بندى ٣٤٢ و ٣٤٣)

بند ٣٤٧ ومما ينبغي التنبيه عليه انه اذا حذفت الجذور الحقيقية
للمعادلة $ص^ع \mp ١=٠$ بأن وضع فيها $ص+\frac{١}{ص}=ز$ كانت
جميع جذور المعادلة المشتملة على ز حقيقية دائماً ولذا يفرض
ان $ل+ى\sqrt{-١}$ أحد المقادير التخيلية للمتغير ص فيكون عكس
هذا المقدار هو $\frac{١}{ل+ى\sqrt{-١}}$ وحيث ان

$$\frac{١}{ل+ى\sqrt{-١}}=\frac{ل-ى\sqrt{-١}}{(ل+ى\sqrt{-١})(ل-ى\sqrt{-١})}=\frac{ل-ى\sqrt{-١}}{ل^٢+ى^٢}$$

وان

فهو مقتضى التكرير المطلق [illegible] المعادلة بالصورة

[illegible]

ويرى [illegible] والمتشابهة

[illegible]

[illegible]

[illegible] = ٠

وهذه المعادلة لها ثلاثة جذور واحدها مطلق وهو ٥ والجذران الآخران المستخرجان من المعادلة ١٦ س٢ − ٤٠ س + ٨١ = ٠ تخيليان

فأما الجذر الحقيقي س = ٥ فانه لا يكون محققاً للمعادلة المفروضة في الحالة التي لا تلاحظ فيها غير المقادير الرقمية للعلامات الجذرية الا انه يكون محققاً لهذه المعادلة اذا تغيرت علامة √(س−٤) فاذا حذفت العلامات الجذرية الموجودة في معادلة تحصلت من المعادلة المنطقة الحادثة من ذلك جميع المقادير المجهولة للمعادلة المفروضة وجميع المعادلات الناتجة منها وذلك بملاحظة المقادير المتنوعة للعلامات الجذرية لانه اذا جعلت كل علامة بعينها مساوية لمجهول ورفع طرفا المعادلة الى قوة درجتها كدرجة

س = م وحينئذ اذا جعل ك رمزاً للزيادة التي تفرض

للمتغير س لزم لكي يكون س = م دالاً على النهاية الكبرى او الصغرى

ان يكون الفرق د(م + ك) − د(م) سالباً دائماً او موجباً دائماً

مهما كانت علامة الكمية ك بشرط ان تكون هذه الكمية المتزايدة

صغيرة بالكفاية

ويكن ايضاً ان يقال ان المقدار س = م تؤخذ منه النهاية الكبرى

والصغرى للدلالة عندما يأخذ س في الازدياد حتى يتجاوز

المقدار م وتأخذ الدلالة في الازدياد الى الحد الذي تأخذ منه

في التناقص او عندما يأخذ س في التناقص الى المقدار م وتأخذ الدلالة في التناقص الى الحد الذي تأخذ منه في الزيادة

وقد شوهد انه اذا كانت الدلالة المبينة بالرمز د(س) تامة حدث

$$د(س + ك) = د(م) + دَ(م) ك + دً(م) \frac{ك^2}{1 \times 2} + الخ$$

ومن هنا يؤخذ

$$(1) \ldots\ldots \quad د(م + ك) - د(م) = دَ(م) ك + دً(م) \frac{ك^2}{1 \times 2} + الخ$$

فاذا فرض للكمية ك مقدار صغير بالكفاية كان الطرف الثاني

من هذه المتساوية متحداً في العلامة مع حدها الاول فاذاً لم

تنعدم الدلالة دَ(م) كان الفرق د(م + ك) − د(م) متخالفاً

فی الملاصقة مع الكمية ك واذا لا يمكن ان تكون الدلالة د(ح) هی النهاية الكبرى ولا الصغرى

واذا كانت الدلالة دَ(ح) معدومة وكانت الدلالة دً(ح) غير معدومة كان الفرق د(ح+ك) ـ د(ح) متحدًا فی العلامة دائمًا مع ك بشرط ان تكون هذه الكمية صغيرة بالكفاية وحينئذ اذا كانت الدلالة دً(ح) كمية سالبة كانت الدلالة د(ح) هی النهاية الكبرى واذا كانت الدلالة دً(ح) كمية موجبة كانت الدلالة د(ح) هی النهاية الصغرى

فاذا كانت الدلالة دَ(ح)=٠ والدلالة دً(ح)=٠ فی آن واحد فلا يحصل من المقدار س=ح واحدة من النهايتين الكبرى او الصغرى، ما لم تكن الدلالة دً(ح)=٠ ايضًا لانه يحصل فی هذه الحالة للمقدار س=ح نهاية هی الكبرى اذا كانت الدلالة دًّ(ح) كمية سالبة ونهاية اخرى هی الصغرى اذا كانت الدلالة دًّ(ح) كمية موجبة

ويلزم على العموم لكی تحصل من المقدار س=ح النهاية الكبرى او الصغرى للدلالة د(س) ان تكون الدلالة الاولى التی لم تنعدم من بين مشتقات الدلالة د(س) مشتقة زوجية المرتبة فان كانت

كانت هذه الدلالة كمية سالبة تحصلت من المقدار $س = ح$ نهاية هي الكبرى وان كانت موجبة تحصلت منه نهاية هي الصغرى

مثلا اذا كان $د(س) = س^٣ - ٩ س^٢ + ١٥ س - ٣$ وجعلت الدلالة المشتقة من الدلالة ذات الدرجة الاولى مساوية للصفر تحصلت من ذلك المعادلة

$$س^٢ - ٦ س + ٥ = ٠$$

التي يكون جذراها هما ١ و ٥ وحيث ان المقدار $س = ١$ يصير الدلالة $د''(س)$ مساوية للمقدار -١٢ فيكون المقدار الذي تأخذه الدلالة $د(س)$ في فرض $س = ١$ هو النهاية الكبرى وحيث ان المقدار $س = ٥$ يصير الدلالة $د''(س)$ مساوية للمقدار $+١٢$ فيترتب عليه ان الدلالة $د(س)$ تكون هي النهاية الصغرى

وان كان $د(س) = س^٣ - ٣ س^٢ + ٣ س + ٢$

وكانت المشتقة الاولى من هذه الدلالة هي $٣ س^٢ - ٦ س + ٣$ أو $٣ (س - ١)^٢$ فلا يمكن انعدامها الا في فرض $س = ١$ وحيث ان هذا المقدار المفروض للمتغير س يصير الدلالة $د''(س)$ معدومة والدلالة $د'''(س)$ ثابتة عن هذه فلا تكون للدلالة

المفروضة واحدة من النهايتين الكبرى والصغرى

بند ٣٥٤ ومتى كانت الدلالة دَ(ح) غير معدومة كان الفرق د(ح+ك) - د(ح) بالنسبة لمقادير موجبة دون الكمية ك متحدا في العلامة مع الدلالة دَ(ح) وبناء على ذلك اذا فرض للمتغير مقادير آخذة في الزيادة أخذت الدلالة د(س) في الزيادة ان كانت المشتقة دَ(س) كمية موجبة وفي التناقص ان كانت هذه المشتقة كمية سالبة ويمكن ان يستنبط من هنا انه اذا كانت الدلالة د(س) هي النهاية الكبرى أو الصغرى كان دَ(س)=٠ لانه يلزم بسبب ان الدلالة د(س) لا تزال اخذة في الزيادة الى الحد الذى تأخذ منه في التناقص أو انها لا تزال آخذة في التناقص الى الحد الذى تأخذ منه في الزيادة ان علامة الدلالة دَ(س) تتغير وهذا لا يتأتى الا اذا انعدمت هذه الدلالة وكذلك اذا كانت المشتقة دً(س) كمية موجبة تزايدت الدلالة دَ(س) واخذت في الانتقال من السلب الى الايجاب حتى انعدمت وبناء على ذلك يكون للدلالة د(س) نهاية هي الصغرى واذا كانت المشتقة دً(س) المذكورة كمية سالبة اخذت الدلالة دَ(س) في الانتقال من الايجاب الى السلب

حتى انعدمت وحينئذ يكون بدلالة د(س) نهاية هي الكبرى

ينتج فاذا وضع س بدل ح في المتساوية (١) وقسم طرفاها على

ك تحصل

$$\frac{د(س+ك)-د(س)}{ك} = د'(س) + \frac{ك}{١×٢} د''(س) + \frac{ك^٢}{١×٢×٣} د'''(س) + لخ$$

وحيث ان الدلالات المشتقة د'(س) و د''(س) و لخ تامة بالنسبة

الى س فتكون لها دائماً مقادير انتهائية مادام للتغير س

مقدار انتهائي وحينئذ يمكن أخذ الكمية ك صغيرة بالكفاية

حتى يكون المقدار الرقمي للكمية

$$\frac{ك}{١×٢} د''(س) + \frac{ك^٢}{١×٢×٣} د'''(س) + لخ$$

دون عدد مفروض كالعدد ط الذي يقرب من الصفر بقدر

ما يراد كما تقدم (في صحيفة ٢٢٨) وحينئذ يتحصل

$$\frac{د(س+ك)-د(س)}{ك} > د'(س) - ط = \frac{د(س+ك)-د(س)}{ك}$$

$$< د'(س) + ط$$

وبناء على ذلك اذا اخذت كمية مزدلالة تامة في الازدياد بالتدريج

كانت النسبة بين هذا الازدياد وهذه الكمية المتغيرة نسبة

انتهائية مساوية بالتقريب للمقدار الذي تأخذه الدلالة

ذات المرتبة الأولى المشتقة من الدلالة المفروضة بالنسبة
للمقدار الأصلي المفروض للكمية المتغيرة المذكورة
أو ان الدلالة ذات المرتبة الاولى المشتقة من دلالة تامة لكمية
متغيرة تكون كناية عن نهاية النسبة الواقعة بين كل من ازدياد
الدلالة المذكورة وازدياد الكمية المتغيرة

في طريقة المكررات غير المعينة

بند ٣٥٦ قد تقدم انه اذا اجريت عملية قسمة وكان فيها المقسوم والمقسوم عليه مرتبين بحسب الدرجات التصاعدية لكمية كالكمية س امكن تحصيل خارج مركب من جملة حدود مرتبة بحسب الدرجات التصاعدية للحرف س وممتد الى غير نهاية واستخراجات جذور الكميات الجبرية توصل الى تحليلات كيات مركبة من جمل غير متناهية ولنبرهن على انه يمكن ايضا تحليل مقدار كسري أو غير منطق بدون أن نطبق على ذلك عملية قسمة او استخراج جذر فنفرض في مبدأ الأمر الكسر

$$\frac{ح + د س + ه س^2}{م + ع س + و س^2 + ك س^3}$$

ثم نفرض ان الخارج قسمة هذا الكسر بجملة

$$ح + ا س + ب س^2 + ج س^3 + ...$$

وحيث

وحيث ان المكررات جـ١ و د١ و هـ١ و و و ن كميات غير معلومة
على التعيين [illegible] سيراد تعيينها فيلزم ان تتحصل من الخارج المذكور
بواسطة ضربه في الكمية الكثيرة الحدود م + ح س + ع سً + ك سٌ
المقسوم حـ + د س + هـ سً م وباجراء عملية الضرب يتحصل حاصل
الضرب

م جـ١ + م د١	س + م هـ١	سً + م و	سٌ + م ن
+ ح جـ١	+ ح د١	+ ح هـ١	+ ح د١
	+ ع جـ١	+ ع د١	+ ع جـ١
		+ ك جـ١	[illegible]

ويلزم لكي يكون هذا الحاصل مساويا للمقسوم ان مكررات الحدود الثلاثة
الاول تكون مساوية بالتناظر للمكررات الثلاثة حـ و د و هـ
وان مكررات باقي الحدود تكون معدومة وبناء على ذلك يكون

م جـ١ = حـ
م د١ + ح جـ١ = د
م هـ١ + ح د١ + ع جـ١ = هـ
م و + ح هـ١ + ع د١ + ك جـ١ = ٠
م ن + ح و + ع هـ١ + ك د١ = ٠

فاما المعادلة الاولى فيتحصل منها مقدار المكرر جـ١ واما الثانية
فيحدث منها مقدار المكرر د١ بواسطة مقدار المكرر جـ١ واما المعادلة
الثالثة فيعلم منها مقدار المكرر هـ١ بواسطة مقداري المكررات

د ه ج وثما المعادلة الرابعة وما بعدها من المعادلات التي شكلها

في الوضع فان مكونت خارج القسمة تحصل منها بالابتداء من مكرر القوة

الثالثة للمتغير س بهذه المثابة وهي ان تجمع المكررات الثلاثة

السابقة على بعضها بعد أن تضرب بالتناظر في النسب $\frac{د}{م}$ و $\frac{ج}{م}$ و $\frac{ك}{م}$

ويسهل تحصيل تحليلات الكميات الحادثة من المقادير غير المنطقة

متى علم تحليل الكمية $(١+س)^م$ بفرض الاس م عددا كسريا موجبا

او سالبا وحيث ان الكمية المرفوعة الى قوة درجتها كسر عبارة عن

جذر هذه الكمية بدرجة مساو لمقام هذا الكسر بعد رفعها

الى القوة التي درجتها بسطه فان كانت مرتبة بحسب الدرجات

المتصاعدية او التنازلية كان جذرها كذلك وحينئذ نوضع

$(١) \cdots (١+س)^م = ١ + ج س + د س^٢ + هـ س^٣ + و س^٤ + ...$

وحيث أن المكررات ج و د و هـ و و و ... كميات غير محتوية على

المتغير س سيراد تعيينها فنعلم مباشرة انه يلزم ان يكون الحد

الأول من تحليل الكمية ما ساويا للواحد لان المقدار $(١+س)^م$ يؤول الى ١ متى

فرض س = ٠

واذا كان $(ح + س)^م = ح^م (١ + \frac{س}{ح})^م$ فانه يحصل من ذلك تحليل الكمية

عديمة التجانس $(ح+س)^م$

بعد ان قابل معى فى الى المعادات الأسير * محمد مصطفى افندى

صاحب الاخلاق المرضية * فالحمد لله من حكم المؤلفات

وابدعها * واتقن المصنفات وانفعها * وصلى الله على خاتم النبيين

* ورسول الملك الحق المبين * سيدنا محمد الهادى الامين * وعلى آله

وصحبه الراشدين المرشدين * ما لاح بسماء

الفهوم بدر تمام * وفاح بمحافل

العلوم مسك

ختام

تم على يد أضعف العباد الراجى عفو مولاه الشكور عبده محمد افندى مذكور

وقد تم طبع هذا الكتاب بعون الله الملك الوهاب بمطبعة مدرسة

المهندسخانة الخديوية ببولاق فى ثلاثة عشر خلت من شهر

جمادى الاولى المذكور من شهور سنة الف ومايتين وتسعة وستين

من الهجرة النبوية على صاحبها افضل الصلاة

واجل التحية

امين